波動方程式

甲南大学理工学部機能分子化学科 山本雅博

This manuscript is modified on August 25, 2010 4 : 17 pm

この文章は基本的に有山の教科書 [1] からの抜粋である。記号やわかりにくいところは一部改変してある。

1 波動とは

波は、媒質のある物理量が周期的に変化しがそれが伝播（でんぱ）いくと考えられる。音波なら空気の密度が波の進行方向で粗密になる伝播していくし、電磁波なら電場と磁場が波の進行方向と直角に変位して伝播していく。今、波の進行方向を x 方向とし、ある時間 t 場所 x での変位を $u(x,t)$ とする。時間 $t=t_0=0$ での変位を $f(x)$ とすれば、$f(x)=u(x,0)$ である。今、この変位は**一定の形を保ったまま**一定の速度 v で $+x$ 方向に伝播していくとする。(Fig.1)[1]

$$u(x,\delta t) = f(x - v\delta t) \tag{1}$$

$$u(x,-\delta t) = f(x + v\delta t) \tag{2}$$

δt を t で置き換えると

$$u(x,t) = f(x - vt), \qquad \text{propagate } +x \text{ direction} \tag{3}$$

となる。変位が $-x$ 方向に進む場合は、v を $-v$ に変えればよく

$$u(x,t) = f(x + vt), \qquad \text{propagate } -x \text{ direction} \tag{4}$$

となる。

Fig.1 では，f として波束の例を挙げたが，どのような関数形でもよい。詳細はフーリエ級数やフーリエ変換の解説等を参考にしてほしいが，波束やその他の一般の関数は，周期的な波の重ね合わせで表現できる。従って，周期的な波についてその性質を調べておけば，一般の関数についても解析が容易になる。周期的な波は

$$Ae^{i(kx-\omega t)} = A\cos(kx-\omega t) + iA\sin(kx-\omega t) \tag{5}$$

と書ける。$\cos, \sin$ は周期 2π の関数である。$t=0$ とき，$kx=0,2\pi$ で 1 周期となる。$x=0$ から波長 λ で 1 周期となるので，$\lambda = 2\pi/k$ となる。$x=0$ のとき，$\omega t = 0, 2\pi$ で 1 周期となる。$t=0$ から周期 T で 1 周期となるので，$T=2\pi/\omega$ となる。$\omega = 2\pi\nu$ で振動数を定義すれば，$\nu = 1/T$ となる。ω は角振動数とよばれる。また，$kx-\omega t$ を位相とよぶ。cos の波において一番振幅が正方向に大きいのは位相がゼロ $kx-\omega t=0$ のところである。その位置は，$x=(\omega/k)t$ となり，$+x$ 方向に進行する波となる。また，$v=\omega/k$ となる。$-x$ に進行する波はしたがって，$Ae^{i(kx+\omega t)}$ となる。

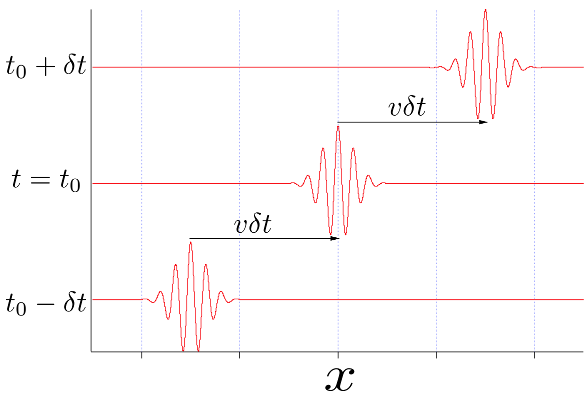


Figure 1: 波束の伝播。波束は $+x$ 方向に速度 v で形を変えずに移動している。

[1] 波が弱まったり形が変化することもあるが短い時間の範囲では近似的に成立するとする。

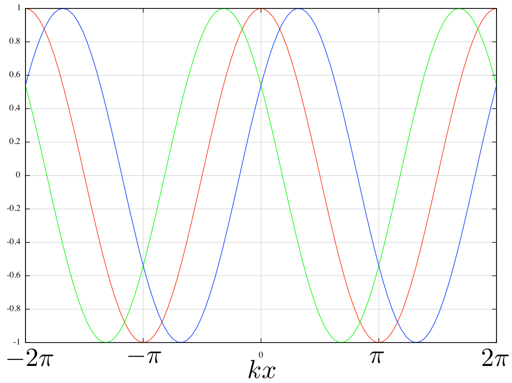


Figure 2: 波の伝播。赤線は $\cos(kx)$, 青線は $\cos(kx-\delta)$, 緑線は $\cos(kx+\delta)$ である。２つの山の間隔から $k\lambda = 2\pi$ がわかる。ある時間後に $+x$ 方向に伝播する場合は $\cos(kx-\delta)$,$-x$ 方向に伝播する場合は，$\cos(kx+\delta)$ となる。

2　波動方程式の導入

u を，x および t で微分する。また，この時 X を以下の様に定義する。f は $f(X)$ となる。

$$
\begin{aligned}
X &\equiv x - vt, \quad f(x-vt) = f(X) && (6)\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{df}{dX} = \frac{df}{dX} && (7)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{dX} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X}\frac{df}{dX} = \frac{d^2 f}{dX^2} && (8)\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial t}\frac{df}{dX} = -v\frac{df}{dX} && (9)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -v\frac{\partial}{\partial t}\frac{df}{dX} = -v\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X}\frac{df}{dX} = v^2\frac{d^2 f}{dX^2} && (10)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && (11)
\end{aligned}
$$

が得られる。$f(x+vt)$ あるいは $f_1(x-vt)+f_2(x+vt)$ についても同様な式が得られる。式 (11) は，波動方程式 (wave equation) とよばれ，時間および空間に関して 2 階の偏微分方程式となっている。また、それぞれの解の足し算もまた波動方程式の解になっていることは、線形性あるいは「重ね合わせの原理」が成り立つことを意味する。

逆に，式 (11) の方程式をみたす関数は，$f(x-vt), f(x+vt), f_1(x-vt)+f_2(x+vt)$ となることも示すことができる。以下のように定義しよう。

$$
X \equiv x - vt, \quad Y \equiv x + vt \qquad (12)
$$

$\partial^2 u/\partial t^2$ と $\partial^2 u/\partial x^2$ を u の X, Y についての微分で表してみる。

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{X+Y}{2}, \quad t = \frac{-X+Y}{2v} && (13)\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial Y} = -v\frac{\partial u}{\partial X} + v\frac{\partial u}{\partial Y} && (14)\\
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} &= -v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial X} + v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial Y} = -v(\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial Y})\frac{\partial u}{\partial X} + v(\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial Y})\frac{\partial u}{\partial Y} && (15)\\
&= v^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2v^2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + v^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} && (16)\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} && (17)\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial Y} = (\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y})\frac{\partial u}{\partial X} + (\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Y})\frac{\partial u}{\partial Y} && (18)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} && (19)
\end{aligned}
$$

波動方程式が成立するには，

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} = 0 \qquad (20)
$$

となる。

$u=f_1(X)+f_2(Y)$ ならこの式は成立する。従って，$u(x,t)=f_1(x-vt)+f_2(x+vt)$

この式 Y について積分すると，

$$\frac{\partial u}{\partial X} = f_1'(X) \tag{21}$$

$f_1'(X)$ は、Y に依存しない任意の X の関数の微分である。この式をさらに X で積分すると、

$$u = \int dX f_1'(X)+f_2(Y)=f_1(X)+f_2(Y) \tag{22}$$

ここで、$f_2(Y)$ は、X に依存しない Y の任意の関数である。以上の関係により、波動方程式を満たす関数 $u(x,t)$ は、$u(x,t)=f_1(x-vt)+f_2(x+vt)$ の関数によりあらわされることが示された。

以上では、波の一般的な性質から波動方程式を導いてきたが、実際には u がもつ物理的な性質から導かれるものである。ロープの張力やばねで連結された質点の例がよく使われる。

3　３次元の波

波の進む方向に向きをもち大きさ $2\pi/\lambda$ のベクトルを波数ベクトル $\mathbf{k}$ としよう。１次元の波 $\cos(kx-\omega t)$ で波の最大振幅は位相がゼロである線が $\pm x$ 方向に進行するとみなせたように、３次元では位相がゼロである面が $\pm\mathbf{k}$ 方向に進行すると見なせる。この波を平面波という。波数ベクトルに垂直な面内のベクトル $\mathbf{r}$ を表す方程式は、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=0 \tag{23}$$

$$k_x x+k_y y+k_z z=0 \tag{24}$$

である。したがって、３次元の平面波は

$$u(\mathbf{r},t) = Aexp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t)] \tag{25}$$

とあらわされる。位相 X と波束 $u=f(X)$ より波動方程式を導こう。

$$X = k_x x+k_y y+k_z z\mp\omega t \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial X}=\mp\omega\frac{\partial f}{\partial X} \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = \mp\omega\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial X}=\omega^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial X}=k_x\frac{\partial f}{\partial X} \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = k_x\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial X}=k_x^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k_y^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k_z^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} \tag{31}$$

$$\nabla^2 u = k^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2},\quad \nabla^2=(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)+(\partial^2/\partial z^2) \tag{32}$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2 = k^2 \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{k^2}\nabla^2 u \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\nabla^2=v^2\nabla^2 u \tag{35}$$

この式が３次元での波動方程式となる。ここで、$v=\omega/k$ である。

3.1　球面波

３次元の波動方程式は，平面波だけではなく，点を波源としてあらゆる方向に伝播する球面波（例：X 線の原子により散乱）も解としてもつ。球座標系で，Laplacian は

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 u = \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \tag{36}$$

u に θ と ϕ の依存性がないとし，$ru(r,t) = U(r,t)$ とおけば，

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 u = \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \tag{37}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{U}{r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{U}{r}\right) = v^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \tag{38}$$

となり，１次元の波動方程式と同じ形になる。１次元の時と同じ考え方で，

$$u(r,t) = \frac{U(r,t)}{r} = \frac{f_1(r-vt) + f_2(r+vt)}{r} \tag{39}$$

図に，球面波 (spherical wave) の典型例を示す。

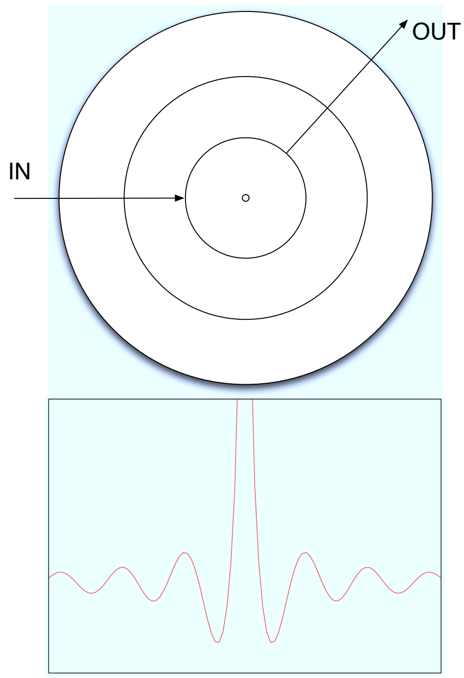


Figure 3: 球面波。波は IN 方向に球の中心に向かって進行し $f_2(r+vt)$，OUT 方向に向かって球の中心から外側に進行する $f_1(r-vt)$。

References

[1] 有山 正孝,「振動・波動」 (基礎物理学選書 (8)) 1986,　裳華房

波 $A\exp[i(kx-\omega t)]$

A:振幅
(・・・) = $kx-\omega t$:位相

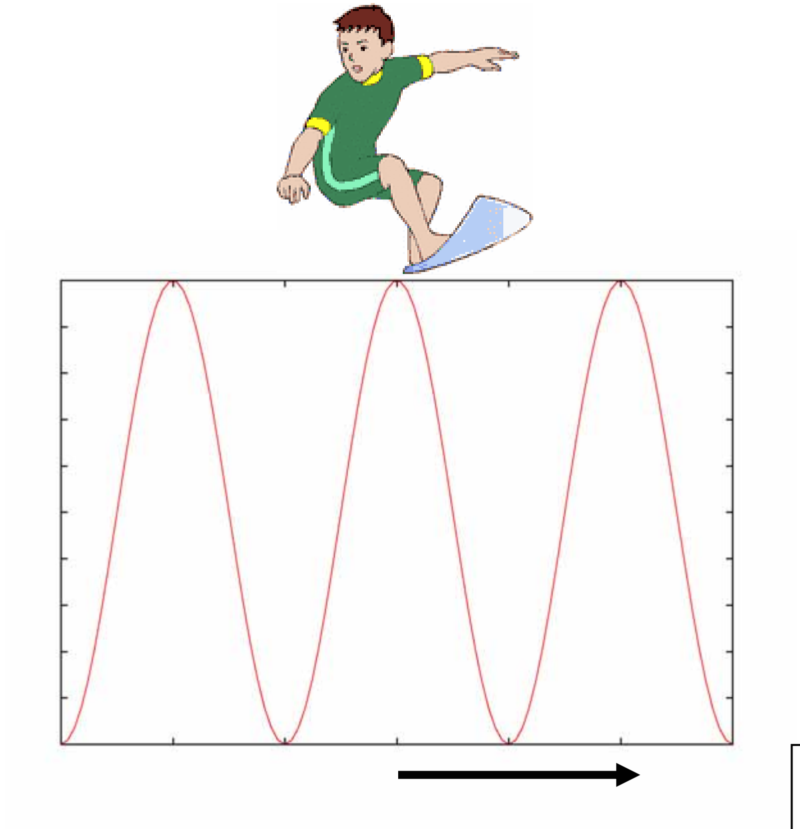
通常は計算の便宜のためcos(x)⇒exp(ix)と複素数の表現をとるが，量子力学の波動関数ではより本質的な意味で複素数の表現を使う。すなわち，存在確率が均一で状態を記述するためにψ*ψ=|A|^2=constとする必要がある。cos^2(x)では，存在確率が一定にならない。

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\
e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots. \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

波が最も高い位置にある

$\cos(kx\text{-}\omega t)$

の位相がゼロの位置がどの
ように移動するのか調べよう。



$$
\begin{aligned}
kx - \omega t &= 0 \\
x &= \frac{\omega}{k} t
\end{aligned}
$$

すなわち，波はω / k の速度で
$x > 0$の方向に進行する。

$t = 0$ で$\cos(kx)$

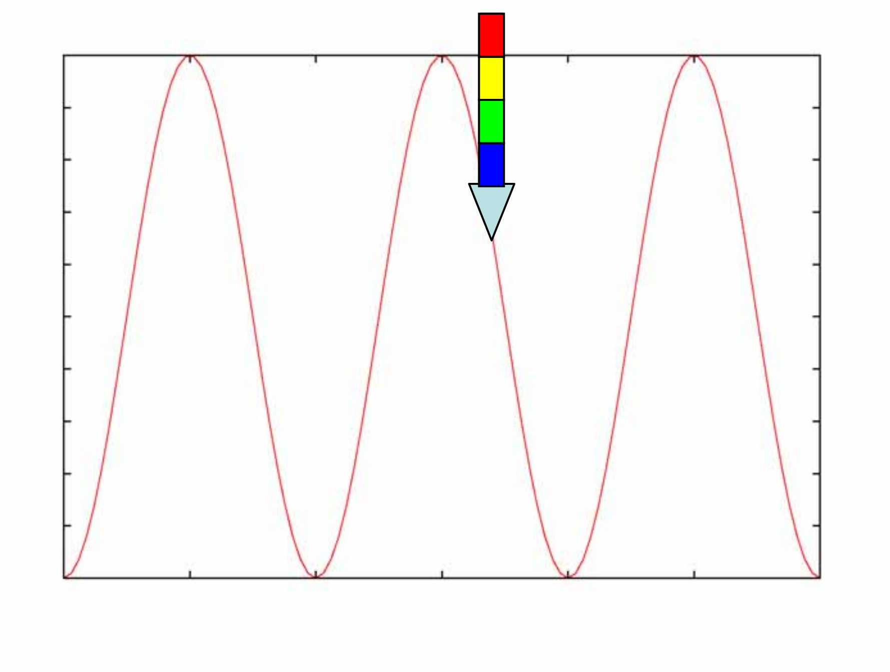
波の一番高い位置：$k x = 0, \pm 2\pi, \ldots$

となるので,

波の波長は, $k\lambda = 2\pi$,

<u>$k = 2\pi / \lambda$</u>

$x < 0$に進行する波は,
$\exp(-ikx)\ \exp(-i\omega t)$
である。



ある特定の場所にウキを浮かべてその振動の時間変化を見よう。

$x = 0$ **の点で**

$$\cos(-\omega t)$$

波が最大の高さになる時間は,

$-\omega t = 0, \quad \pm 2\pi, \quad \ldots.$

周期 $T = 2\pi/\omega$

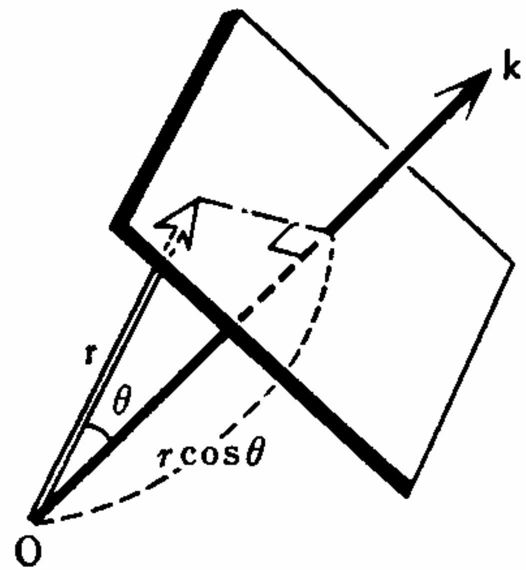
角振動数と振動数は $\omega = 2\pi\nu$

$T = 2\pi/\omega = 1/\nu$

波の速度 (位相速度) は, $\omega / k = 2\pi\nu/(2\pi/\lambda) = \lambda\nu$

光の場合 $\omega / k = \lambda\nu = c$ **となる。**

平面波：Plane wave　$\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)]$



小出昭一郎
量子論
裳華房
より

波の位相が一定であるのは

$$k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \;=\; \mathrm{const}$$

$$kr\cos\theta \;=\; \mathrm{const}$$

⇒ **平面の方程式**
ax+by+cz+d=0

位相一定の ***r*** **は** ***k*** **に垂直**　**位相**=0, *t*=0，　***r*** ・ ***k*** = 0 ⇒　**波の進行方向は** ***k***