微分しても元に戻る関数e^x

微分しても元に戻る関数は，自然現象を説明するための微分方程式を満たす解として頻繁に顔をだす。が，なぜそうなるのかは，証明しておく必要がある。

eの定義は，以下のように与えられる。

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e^xの微分およびその逆関数（自然対数）lnはまた以下の様に表される。

$$\frac{de^x}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$\ln e^x \equiv x$$

上のeの定義で，$u = 1/n$ とし，その自然対数をとると

$$e = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$$

$$\ln e = 1 = \lim_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\ln(1+u)$$

$\ln(1+u) = \Delta x$, $e^{\Delta x} = 1+u$ とおき，$u\to 0$の時$\Delta x \to 0$であるので

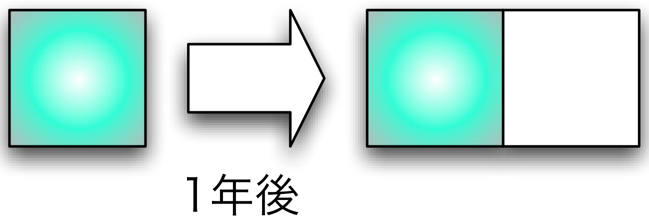
$$1 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$$

従って,以下の式が証明された。

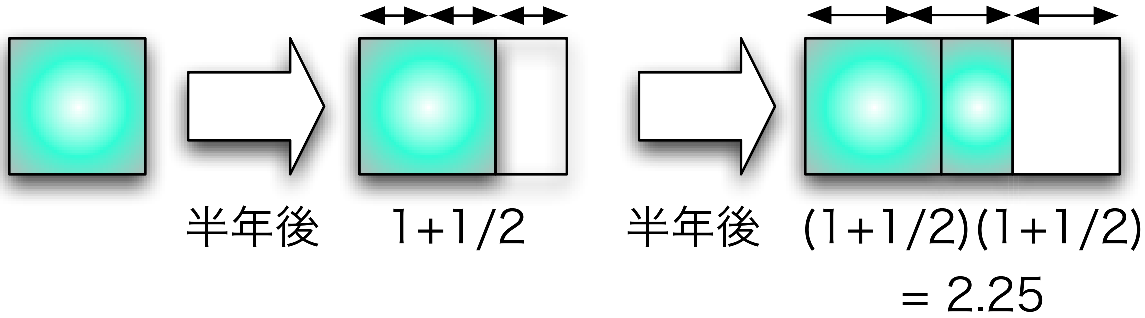
$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

eの定義：金利編

年利（金利） 100 %



途中で解約しても同じ利率で日割りしてくれるなら，どうする？



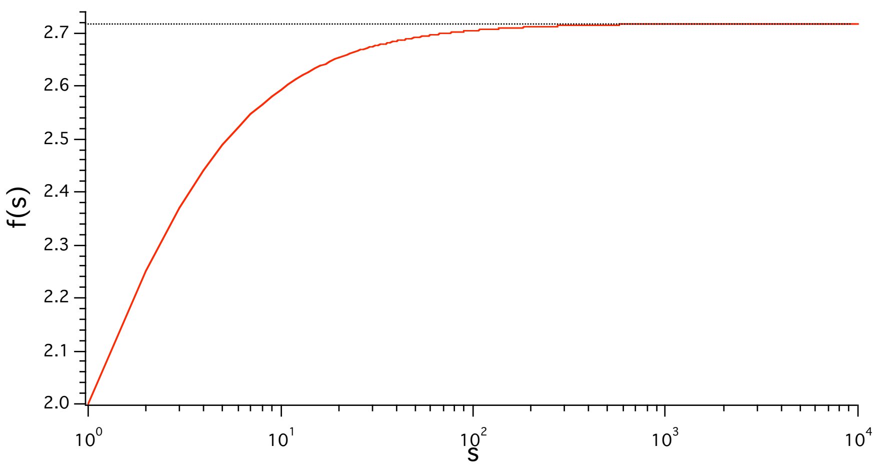
あれ増えた！じゃ，毎日解約・契約を繰り返したた１年後どうなる？

$$(1+\frac{1}{365})^{365} = 2.7145...$$

さらに増えた。もっと細かくしたらどうなるんだろうか？次式で定義される*s*とf(s)をプロットしてみよう。

$$f(s) = (1+\frac{1}{s})^{s}$$

横軸は対数になっているが，ある値に収束する。この値が自然対数の底*e*である。



$$e \equiv \lim_{s\to\infty}(1+\frac{1}{s})^{s} = 2.71828182845905...$$