

p49 命題 2.6 の証明 (確率変数の変換)

確率密度 $p(x) \geq 0$ の間には 次の関係が成立しなければならない。

x が $C \sim x$ ($x \geq C$) となる確率は、

$$\int_C^x p(x) dx \ (\geq 0) \quad \text{で、} \ y=f(x) \text{ が単調な関数ならば} \quad \begin{matrix} C \rightarrow x \text{ のとき、} \\ f(C) \rightarrow f(x) \text{ となり、} \end{matrix}$$
$$\int_C^x p(x) dx = \begin{cases} \int_{f(C)}^{f(x)=y} p(y) dy & \text{単調増加の場合} \\ \int_{f(x)=y}^{f(C)} p(y) dy & \text{単調減少の場合} \end{cases} = \left| \int_{f(C)}^{f(x)=y} p(y) dy \right| \quad \text{一般化}$$

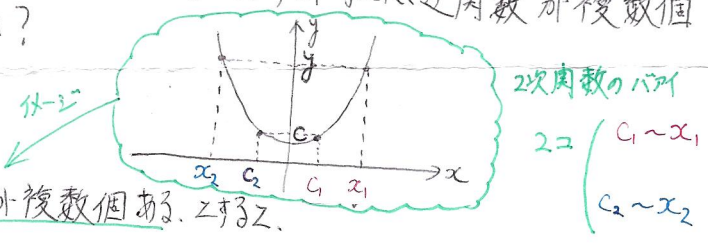
この両辺を y で微分するとこうなる。

(増) : $p(y) = p(x) \frac{dx}{dy} = p(f^{-1}(y)) \frac{d}{dy} f^{-1}(y)$

(減) : $p(y) = -p(x) \frac{dx}{dy} = -p(f^{-1}(y)) \frac{d}{dy} f^{-1}(y)$

一般に $p(y) = \left| p(x) \frac{dx}{dy} \right| = \left| p(f^{-1}(y)) \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \right| \quad \square$

p50 $y=f(x)$ が単調でない場合 (ex. 2次関数など) は、 x の範囲で場合分けが必要で、逆関数が複数個出てくる場合がある。この場合の $p(y)$ はどうなるのか?



命題 2.7 の補正.

$y=f(x)$ が非単調で、 y が $C \sim y$ となる x の範囲が複数個あるとする。

それぞれの範囲で、その単調性から逆関数 $x_i = f_i^{-1}(y)$ を考えることができる。後は p49 の考えと同様で、 y が $C \sim y$ ($C \leq y$) となる確率を考えれば、

$$\int_C^y p(y) dy = \left| \int_{c_1}^{x_1} p(x_1) dx_1 \right| + \left| \int_{c_2}^{x_2} p(x_2) dx_2 \right| + \dots + \dots \quad \left(\begin{matrix} f_1^{-1}(C) = c_1 \\ f_i^{-1}(y) = x_i, \dots \end{matrix} \right) \text{を満たす。}$$

この時 $\left| \int_{c_i}^{x_i} p(x_i) dx_i \right| = \begin{cases} \int_{c_i}^{x_i} p(x_i) dx_i & \text{単調増加} \\ \int_{x_i}^{c_i} p(x_i) dx_i = - \int_{c_i}^{x_i} p(x_i) dx_i & \text{単調減少} \end{cases}$

の2つに場合分けされる。 かに両辺 y で微分すれば、

(★)

$$p(y) = \left| p(x_1) \cdot \frac{dx_1}{dy} \right| + \left| p(x_2) \cdot \frac{dx_2}{dy} \right| + \dots + \dots = \sum_i \left| p(x_i) \frac{dx_i}{dy} \right| = \sum_i \left| p(f_i^{-1}(y)) \frac{d}{dy} f_i^{-1}(y) \right|$$

が入れられる。

物理屋が得意な微小量 dx_i, dy を用いた考え方をすれば、 y が $y \sim y+dy$ となる確率は $p(y) dy$ ($dy \geq 0$) となり、
良く、変換 $y=f(x)$ が非単調ならば、 $y \sim y+dy$ の値をとり得る x の範囲が複数あり、例えば、 $x_1 \sim x_1+dx_1, x_2 \sim x_2+dx_2, \dots$ と考えれば、 $p(y) dy$ は、 x が これらの値 におさまる確率に ほぼ 等しい値の和と等しくなるので、

$$p(y) dy = \left| p(x_1) dx_1 \right| + \left| p(x_2) dx_2 \right| + \dots = \sum_i \left| p(x_i) dx_i \right|$$

が得られる。 $\rightarrow$ 35へ

単調(増)や(減)で、符号が変わる!

↓
教科書はこの符号の考慮ができていないからおかしくなっている。

P51の例2は、(★)を使えば一撃で変換できる。

↓

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{のとき、} y=x^2 \text{ とうつした分布はどうなる？}$$

今回逆関数は2つ

$$\begin{aligned} &\rightarrow x_1 = f_1^{-1}(y) = \sqrt{y} \\ &\rightarrow x_2 = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} \end{aligned} \quad \text{すなわち、}$$

$$\begin{aligned} l(y) &= \left| p(\sqrt{y}) \times \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \left| p(-\sqrt{y}) \times \frac{1}{-2\sqrt{y}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \times \frac{-1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \quad \square. \end{aligned}$$

間違いない、ご質問がありましたらメールを下さい。

お

井上 貴斗