What's Jacobian?

Masahiro Yamamoto

This manuscript is modified on July 18, 2016 10 : 35 am

# 1　変数変換

## 1.1　定義

最初に 1 次元の変数変換

$$x \mapsto u(x) \tag{1}$$

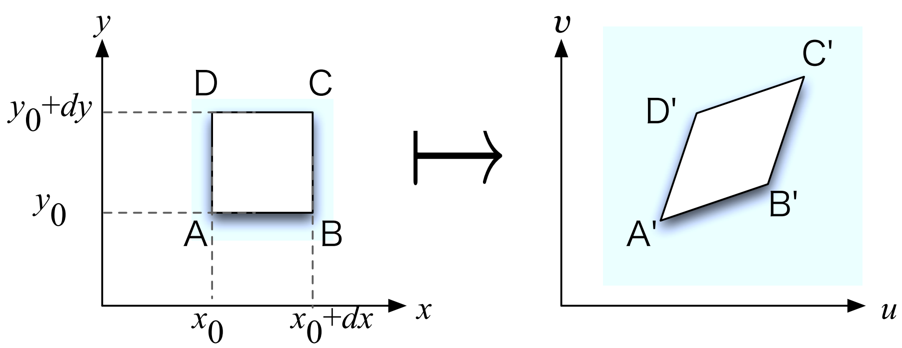
を考える。いま，$(x_0, x_0 + dx)$ の微少区間を考えると，

$$\begin{aligned} x_0 &\mapsto u(x_0) && (2)\\ x_0 + dx &\mapsto u(x_0 + dx) = u(x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0} dx && (3) \end{aligned}$$

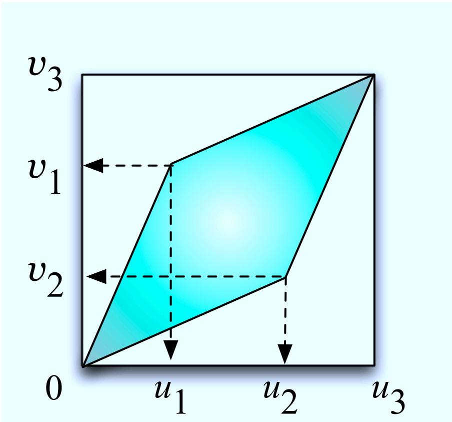
すなわち，

$$dx \mapsto du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \tag{4}$$

となる。つぎに，２次元の変数変換 $x, y \mapsto u(x, y), v(x, y)$ を考える。



$$
\begin{aligned}
x_0, y_0 &\mapsto u(x_0,y_0), v(x_0,y_0) \qquad (\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}') && (5)\\
x_0+dx, y_0 &\mapsto u(x_0+dx,y_0), v(x_0+dx,y_0) \qquad (\mathrm{B} \mapsto \mathrm{B}') && (6)\\
&\simeq [u(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} dx, v(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} dx] && (7)\\
x_0+dx, y_0+dy &\mapsto u(x_0+dx,y_0+dy), v(x_0+dx,y_0+dy) \qquad (\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}') && (8)\\
&\simeq [u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy] && (9)\\
x_0, y_0+dy &\mapsto u(x_0,y_0+dy), v(x_0,y_0+dy) \qquad (\mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}') && (10)\\
&\simeq [u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}dy, v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}dy] && (11)
\end{aligned}
$$




面積 $S$(ABCD) および $S$(A'B'C'D') は,

$$
\begin{aligned}
S(\mathrm{ABCD}) &= dxdy && (12)\\
S(\mathrm{A'B'C'D'}) &= u_3v_3 - \frac{u_2v_2}{2} - \frac{u_1v_1}{2} - \frac{(v_2+v_3)(u_3-u_2)}{2} - \frac{(u_1+u_3)(v_3-v_1)}{2} && (13)\\
& u_1 = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad u_3 = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = u_1 + u_2 && (14)\\
& v_1 = \frac{\partial v}{\partial y}dy, \quad v_2 = \frac{\partial v}{\partial x}dx, \quad v_3 = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = v_1 + v_2 && (15)\\
S(\mathrm{A'B'C'D'}) &= (u_1+u_2)(v_1+v_2) - \frac{u_2v_2}{2} - \frac{u_1v_1}{2} - \frac{(2v_2+v_1)u_1}{2} - \frac{(2u_1+u_2)v_2}{2} && (16)\\
&= (1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})u_1v_1 + (1-1-1)u_1v_2 + u_2v_1 + (1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})u_2v_2 = u_2v_1 - u_1v_2 && (17)\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy \equiv |J| dxdy && (18)
\end{aligned}
$$

すなわち，変換後の微少領域の面積はもとの $|J|$ 倍となっている。このとき行列式 $|J|$ は $u, v$ の $x, y$ に対するヤコビアン (Jacobian) と呼ばれ,

$$|J| = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \qquad (19)$$

とも書かれる。

## 1.2 平面極座標

変数変換の場合，例えば極座標の場合 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の様に $u, v \mapsto x(u,v), y(u,v)$ の形で書かれることが多い。$(u = r, v = \theta)$ 上の議論で，$x, y$ と $u, v$ を入れ替えると，

$$S(\mathrm{A'B'C'D'}) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv \tag{20}$$

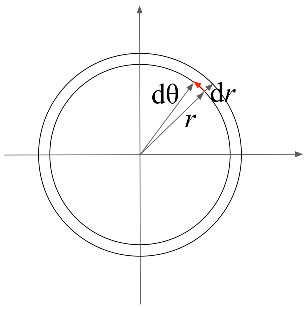
If we can approximate, $$S(\mathrm{A'B'C'D'}) \simeq dxdy \tag{21}$$

$$dS = dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv \tag{22}$$

例として極座標の場合をとりあげよう。

$$dS = dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} drd\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} drd\theta = rdrd\theta \tag{23}$$

この式は，極座標系のおける面積素辺は，$dr \times rd\theta$ であることから容易に理解できる。

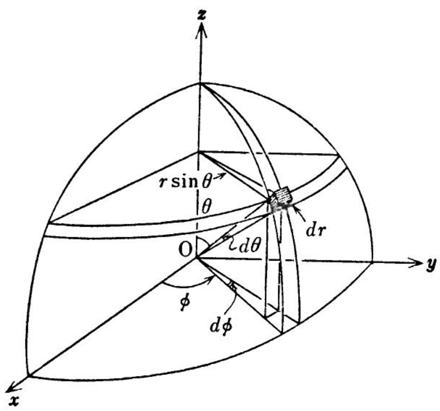



## 1.3 球面極座標

３次元の場合も，ヤコビアンを $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$ と定義すればよい。以下の図に示す球座標の場合，$u = r, v = \theta, w = \phi$ であり，変換は $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ によりなされる。図より，$dV = dr \times rd\theta \times r\sin\theta d\phi$ となることが直感的に理解できる。

ヤコビアンで求める場合は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
dV &= dxdydz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} drd\theta d\phi & (24) \\
&= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} drd\theta d\phi & (25) \\
|J| &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin\theta\cos^2\phi & (26) \\
&= r^2\sin^2\theta\sin\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta & (27) \\
&= r^2\sin\theta & (28) \\
dV &= r^2 dr\sin\theta d\theta d\phi & (29)
\end{aligned}
$$




## 2　熱力学：変数変換

今，ヤコビアンをもう一度定義しておこう。$n$ 変数の $x_i$, $(i=1,2,3,....,n)$ の関数 $u_i$ が $n$ 個ある。ここで，n 変数の xi, (i=1, 2, 3, ⋯ n) の関数 ui が n 個ある [ ui(x1, x2, x3, ⋯, xn) (i=1, 2, 3, ⋯ n) ]．いま，ui は yi を媒介して xi の関数とする．また，ui, yi, xi は独立であるとする．

$$u_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \quad (i=1,2,3,....,n) \tag{30}$$

ヤコビアンは以下のように定義される。

$$\frac{\partial(u_1,u_2,u_3,...,u_n)}{\partial(x_1,x_2,x_3,...,x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\partial u_i}{\partial x_j} & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \frac{\partial u_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \det\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\} \tag{31}$$

$\{u_i\}$ が $\{y_i\}$ を媒介して $\{x_i\}$ の関数であれば，(また，$\{u_i\},\{y_i\},\{x_i\}$ は独立であるとする．)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \tag{32}$$

これはある意味 $n$ 行 $\times n$ 列の行列の積 $C = AB$ とみなせる。それぞれの行列式は

$$\det C \quad = \det(AB) = (\det A)(\det B) \tag{33}$$

従って,

$$\frac{\partial(u_1,u_2,u_3,...,u_n)}{\partial(x_1,x_2,x_3,...,x_n)} = \frac{\partial(u_1,u_2,u_3,...,u_n)}{\partial(y_1,y_2,y_3,...,y_n)}\frac{\partial(y_1,y_2,y_3,...,y_n)}{\partial(x_1,x_2,x_3,...,x_n)} \tag{34}$$

また，熱力学でよくでてくる偏微分を定義する．$u$ が独立変数 $(x,y,z,...)$ の関数 $u(x,y,z,...)$ である．上で $u_1 = u, u_2 = y, u_3 = z, ... \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, ....$ としてヤコビアンを求めると, $x,y,z,...$ は独立変数なので,

$$\frac{\partial(u,y,z,...)}{\partial(x,y,z,...)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} & \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} & \underbrace{\frac{\partial y}{\partial z}}_{=0} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{35}$$

従って,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y,z,...} = \frac{\partial(u,y,z,...)}{\partial(x,y,z,...)} \tag{36}$$

となる。