

Zoom on-line 参加者

四回生 男子一名

計一名

質問内容

1. ガウス関数に関する問題で、いくつかの設問があるが、微分や積分に関する問題は解けたが、以下の微分方程式に関する問題が分からない。
- 2 階の微分方程式(1)について、 x が大きいところでの近似解は式(2)で与えられることを示せ。

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \alpha^2 x^2 \phi(x) \quad (1)$$

$$c_1 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right) + c_2 \exp\left(\frac{\alpha}{2}x^2\right) \quad (2)$$

回答内容

1. x が大きいところでは、式(2)の第一項は第二項に比して非常に小さいと考えられるの ($\exp(-\alpha x^2) \ll \exp(\alpha x^2)$, $\alpha > 0$)、 x が大きいところでの式(1)の一般的な近似解を式(2)で表わす設問の意図が分からないが、解答としては、式(2)を式(1)の両辺に代入し、等式が近似的に成立することを示せばよいのではないかと、自分で計算してみて、納得がいかなければまた次回質問してくれればいと、回答。

学生への回答は、そこまでだったが、次の設問では、 $f(x)\exp(-\alpha x^2/2)$ の2次微分の結果を問うているので、式(1)の2階微分方程式(変数係数)の解析解を問おうとしているように思われる。それについては以下のように考えている。

式(1)は形式上、運動エネルギーと位置エネルギー(振動子、プラスの値)の和が“ゼロ”という形になっているので、式(1)には意味のある解析解は存在しないと考えられる。実際、式(1)に類似する微分方程式は、調和振動子の波動方程式であるが、最低エネルギーはゼロではなく、 $h\nu/2$ である。不確定性原理から明らかなことであるが、ゼロの解はない。

以上