11月14日(2022) 学修相談実施報告

Zoom on-line 参加者

一回生　一名

計一名

質問内容

一回生

1．不完全微分と完全微分のところがわからない。

回答内容

一回生

1．　山登りを例にとり、山頂の位置エネルギーはどのようなルートで山頂に到達したか、ルートに依らず高さが決まれば一定の値を取る。出発地から山頂を経て、別のルートで出発地に戻ったとき、どのルートを選んでも位置エネルギーの全変化量は常にゼロになることは明らかである。 このようにルート(経路)によらない値は状態量と呼ばれ、多くの場合、2 つ以上の変数の関数として表される、と前置きした上で、具体的に 2 変数の関数として $f(x,y)=x^2+y^2$を取り上げた。

変数が (x,y) から $(x+dx,y+dy)$ に変化したとき、その変化量 $f(x+dx,y+dy)-f(x,y)$ は微分 $df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy=2xdx+2ydy$で表され、$df$ の値は (x,y)を $(x+dx,y+dy)$までどのようなルートで変化させるかには依らないこと、つまり f は状態量になっていることを円の図を描いて説明した。

$df=2xdx+2ydy$のように、変化量が経路に依らない微分は完全微分と呼ばれる。

一方、df に形が似ているが、$dg=2xydx+2ydy$ではどうか。微分形が完全微分かそうでないかを判断する必要十分条件は、式(1)で、$f(x,y)=x^2+y^2$は当然のことながら式(1)を満たしている。

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right) \qquad (1)$$

ところが、dg を式(2)のように表すと、

$$dg=2xydx+2ydy=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y=2xy,\quad \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x=2y$$

dg は式(1)に相当する条件式を、式(3)から明らかなように、満たしていないことがわかる。

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\right)\neq\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right) \qquad (3)$$

dg は、したがって、不完全微分と呼ばれ、変化量はどのような経路で求めるかによる。

状態量かそうでないか、つまり完全微分か不完全微分かは、熱力学の基本概念になっている。

　およそ以上のことを説明したが、説明内容をより具体的にするために、以下のような練習問題を解かせてみるのも良いかなと、後で思った。

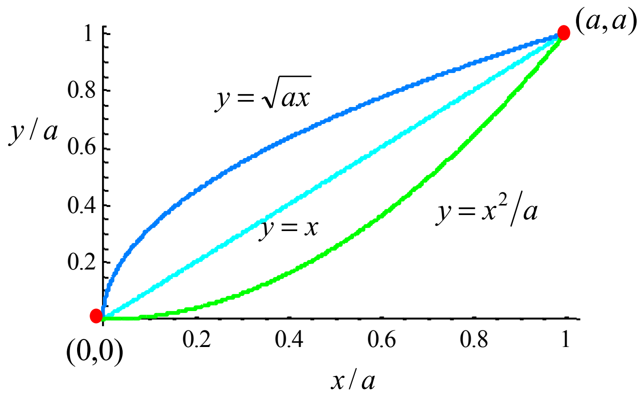
練習問題

自然科学現象（の変化）は微分形で記述されることが多い。微分形には 2 つのタイプがある。

1．その一つとして、ある量fの変化量がx、yを変数として$df = y - 2xdx + 2ydy$で与えられているとする。(x, y)が$(0,0)$から(a,a)に変化するとき、変化量が変化の経路、$(y = x)$、$(y = \sqrt{ax})$、$(y = x^2/a)$に依らないことを、変化量を経路ごとに計算して示しなさい。（dfは完全微分）。

2．変化量が$dg = 2xydx + 2ydy$で表されるとき、1.の 3 つのルートごとにgの変化量を求め、すべて値が異なることを確かめなさい。したがって、gをx、yの関数で表すことができない。（dgは不完全微分）。

3 つのルート（ルートは無数にある)。



（以上）