

Zoom on-line 参加者

一回生 一名

計一名

質問内容

1. 授業で習っているところで、わからないところがあるので教えてほしい。質問内容(講義資料の一部)をメールの添付ファイルで Zoom 開始前に送っておいた。

具体的な質問は、微分のところを習っていて、2 変数の関数の微分 $df(x, y)$ が完全微分である条件は、式(1)が成り立つことである、と図や式を用いて説明を受けたが、式(1)が何故導かれるのかわからないので、教えてほしい。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \right]_x = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) \right]_y \quad (1)$$

回答内容

1. 完全微分の意味は、微分が経路によらない、ということで、実際、点 (x, y) における $f(x, y)$ の値は、点 $(x + dx, y + dy)$ に移動したとき、 $f(x + dx, y + dy)$ に変化するが、その差を式(2)のように表すと、

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \quad (2)$$

df の値がどのような経路を経て計算しても、同じになることを示せばよい。

経路の取り方は無数にあるが、わかり易いのは次の二つの経路(i)、(ii)で、点 (x, y) から点 $(x + dx, y + dy)$ への移動を、変数一つずつ微小変化させる。

経路 (i): $(x, y) \rightarrow (x + dx, y) \rightarrow (x + dx, y + dy)$ (図の赤色矢印)

式(2)の微小変化は、式(3)のように経路に沿った二つの差の和で表される。

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y) + f(x + dx, y) - f(x, y) \quad (3)$$

式(3)の第一項は y による偏微分、第二項は x による偏微分であるので、式(3)は式(4)のように表わすことができる。

$$df = \left(\frac{\partial f(x + dx, y)}{\partial y} \right)_{x+dx} dy + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y dx \quad (4)$$

式(4)の第一項の偏微分の値は $(x + dx, y)$ における値であることに注意すると、この項は更に展開して、式(5)のように表す(近似する)ことができる。

$$\left(\frac{\partial f(x + dx, y)}{\partial y} \right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \right]_x dx \quad (5)$$

式(5)を式(4)に代入すれば式(6)が得られる。

$$\begin{aligned} df &= \left(\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \right]_x dx \right) dy + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y dx \\ &= \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x dy + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y dx + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \right]_x dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

経路 (ii) : $(x, y) \rightarrow (x, y + dy) \rightarrow (x + dx, y + dy)$ (図の青色矢印)

式(2)の微小変化は、式(3')のように経路に沿った二つの差の和で表される。

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy) + f(x, y + dy) - f(x, y) \quad (3')$$

式(3')の第一項は x による偏微分、第二項は y による偏微分であるので、式(3')は式(4')のように表わすことができる。

$$df = \left(\frac{\partial f(x, y + dy)}{\partial x} \right)_{y+dy} dx + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x dy \quad (4')$$

式(4')の第一項の偏微分の値は $(x, y + dy)$ における値であることに注意すると、この項は更に展開して、式(5')のように表す(近似する)ことができる。

$$\left(\frac{\partial f(x, y + dy)}{\partial x} \right)_{y+dy} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y \right]_x dy \quad (5')$$

式(5')を式(4')に代入すれば式(6')が得られる。

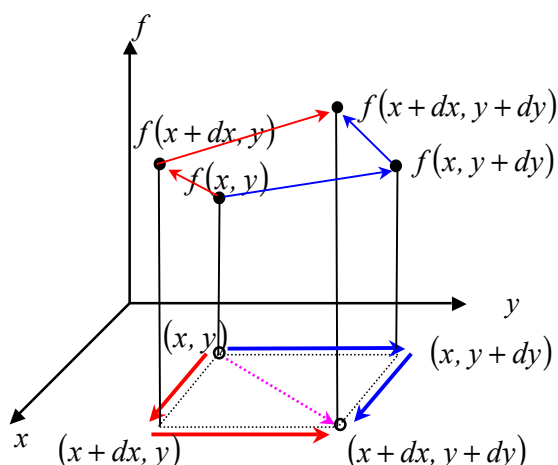
$$\begin{aligned} df &= \left(\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y \right]_x dy \right) dx + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x dy \\ &= \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x dy + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y \right]_x dx dy \end{aligned} \quad (6')$$

式(6)、(6')は等しくなければならないので、結論として式(7)が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y \right]_x dx dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x \right]_y dx dy \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_y \right]_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_x \right]_y$$

$$\text{or } f_{xy} = f_{yx} \quad (7)$$

経路の概念図を下に示しておく。



以上の説明は、詳しい講義資料のプリントに基づいておこなったもので、学生は理解できた様子であったが、学生は完全微分を定義しておく必要性が今ひとつわからなかったのではないかと、説明の後で思っ

た。

スカラー関数の微分は完全微分なので、不完全微分の例を挙げて説明しておけば、完全微分を定義する必要性が熱力学の知識によらなくても、完全微分の理解に役立ったのではないかと思った。

例えば、簡単な例として

$df = dx + dy$, $df = xdx + ydy$, $df = ydx + xdy$, 等は完全微分であるけれど、

$df = xdx + xdy$, $df = x^2 dx + xydy$, 等は不完全微分であり、これらについて、経路によって積分値が異なることを実際に計算で確かめてみることもできるので、質問した学生には、別途補足説明をしておきたいと思った。

以上