11.05/2013 学修相談実施報告

来室学生

三回生　　男子 一名

計一名

質問内容

調和振動子の固有関数は 1 に規格化され、量子数が異なればお互いに直交しているが、実際に固有関数の積の積分がゼロになることを$\upsilon = 0$と$\upsilon = 2$の場合に示すように授業の課題で出された。これらの関数は共に偶関数なので、関数の偶奇性から積分がゼロになることを示すことができない。積分の仕方がわからないので教えてほしい。学修相談は今回が初めて。

回答内容

波動方程式の固有関数は通常規格・直交化されていることを簡単に話し、調和振動子の固有関数の形についてその特徴をテキストの図 5.8 に基づいて説明した。 その図から関数の積の積分がゼロになることが、偶奇性から容易にいえること、また偶関数あるいは奇関数同士の場合にも、量子数が異なれば積分値がゼロになることが図から予想されることを見た上で、実際に下式の積分が具体的にどのような式で表されるか学生に書かせた。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0 \times \Psi_2 dx = 0$$

具体的には積分は定数を除いて下式のように表されるが

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \times \left(2\alpha x^2 - 1\right) e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\alpha x^2 - 1\right) e^{-\alpha x^2} dx$$

積分は下の一般式で表されるので、n に適当な値を代入し、付表の式を用いて計算すればよい、と回答。実際に計算させ、学生は積分値がゼロになることを確かめることができた。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \left(\text{テキストの付表}\right)$$

固有関数が規格化されていることも同様に確かめることができるので、自分でやってみるように勧めた。

回答では、なぜ付表の式が得られるかまでは説明しなかったが、この形の積分はいろいろな場面で出てくるので、必ず計算できるように、また、付表の式の誘導を教えてほしければ、また来るようにいった。

なお、学生に波動関数の一般的な性質を説明する中で、テキストの図 5.8 は(1)零点エネルギーと他の振動準位のエネルギー間隔が正しく書かれていない、(2)確率分布を表す波動関数の 2 乗の大きさが相対的に正しく書かれていない（面積が 1 になっていない）、ことに

気付き学生にもそう説明した。

(以上)