5 月 15 日(2017) 学修相談実施報告

来室学生

三回生　　男子　一名

一回生　　男子　二名

計三名

質問内容

三回生

1. 物理化学の授業で、教科書の波の運動を表わす波動方程式(式(1))の(一般)解が式(2)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1) \qquad \text{(教科書の(2.1)式)}$$

$$u(x,t) = \sum A_n\, cos(\omega_n t + \phi_n)\sin\frac{n\pi\pi}{l} \qquad (2) \qquad \text{(教科書の(2.25)式)}$$

で与えられることを、教科書の式を用いて証明する課題が出されているが、答えられないので教えてほしい。

一回生

1. 化学基礎 B の授業で、微分・積分に関する問題が出された。 その内、下の証明問題、式 (I)、(II)がわからないので教えてほしい。

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx \qquad (I)$$

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \qquad (II)$$

回答内容

三回生

1. 波の運動を表わす(古典的)波動方程式 (1 次元)が式(1)で与えられることは知っているとして、教科書の説明にしたがって、以下の順序で回答した。

(i) 式(1)の偏微分方程式は変数分離の方法で解くことができ、解は式(2)のように表わされるとしてよい。

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (2)$$

(ii) 式(2)を式(1)に代入し、結果を変数 x, t が分離された形で表わすと、式(3)が得られる。 式(3)の左辺は x だけの関数、右辺は t だけの関数（v は波の伝播速度）なので、x,t の値に関わらず等式が成り立つためには、式(3)は定数に等しくなければならない。 なお、変数はそれぞれの関数に 1 つだけなので、偏微分記号∂は微分記号 d に変えてよい。

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{v^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} \qquad (3) \qquad \text{(教科書の(2.5)式)}$$

その定数を K とおくと、$X(x)$、$T(t)$ はそれぞれ x、t だけで表わされる微分方程式(4)、(5)を満たす。

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=K \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2X(x)}{dx^2}=KX(x) \qquad (4) \qquad \text{（教科書の(2.8)式）}$$

$$\frac{1}{v^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=K \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2T(t)}{dt^2}=Kv^2T(t) \qquad (5) \qquad \text{（教科書の(2.9)式）}$$

(iii) 微分方程式(4)、(5)の解はいずれも三角関数の和で与えられることはよく知っているので、例えば A、B、β を定数として、$X(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ と表わされる。

$$X(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x, \qquad K=\beta^2 \qquad (6)$$

(iv) 微分方程式の解は境界条件や初期条件を満たすように決める。

ここで考えている波は（両端が固定された）定常波なので、$X(0)=0$、$X(l)=0$ を満たすように定数 A、B、β を定めると、式(7)のようになる。

$$A=0, \qquad \beta\times l=n\pi \qquad n=1,2,3\cdots (7) \qquad \text{（教科書の(2.19)式）}$$

したがって、$X(x)$ は式(8)で表わされる。

$$X(x)=B\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (8) \qquad \text{（教科書の(2.20)式）}$$

同様に、$T(t)$ に対する解も三角関数の和で表されるが、初期条件（時間 t における $T(t)$ の値）が与えられていないので、D、E を任意定数として、式(9)で与えられる。

$$T(t)=D\cos\omega_n t+E\sin\omega_n t, \qquad \omega_n=v\beta=v\cdot\frac{n\pi}{l} \qquad (9) \qquad \text{（教科書の(2.22)式）}$$

(v)（境界条件を満たす）偏微分方程式(1)の解は、式(8)と(9)の積で与えられるので、任意整数 n に対する解の 1 つを $u_n(x,t)$ と書くと、それは式(10)のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\times(D_n\cos\omega_n t+E_n\sin\omega_n t) \\ &= (F_n\cos\omega_n t+G_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (10) \qquad \text{（教科書の(2.23)式）} \end{aligned}$$

したがって、偏微分方程式(1)の一般解 $u(x,t)$ は、式（11）で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(F_n\cos\omega_n t+G_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (11) \qquad \text{（教科書の(2.24)式）} \end{aligned}$$

(vi) 式(10)または(11)の $F_n\cos\omega_n t+G_n\sin\omega_n t$ の項を、三角関数の合成で 1 つの三角関数で表わすと、式(12)のように表わすことができ、これを用いて、

$$F_n\cos\omega_n t+G_n\sin\omega_n t=A_n\cos(\omega_n t+\phi_n) \qquad (12)$$

教科書の式(25)が得られる。　三角関数の合成で現れる位相 ϕ_n については、具体的な問題に出会うまでは、特に問題にしなくてよいのではないか、と回答。

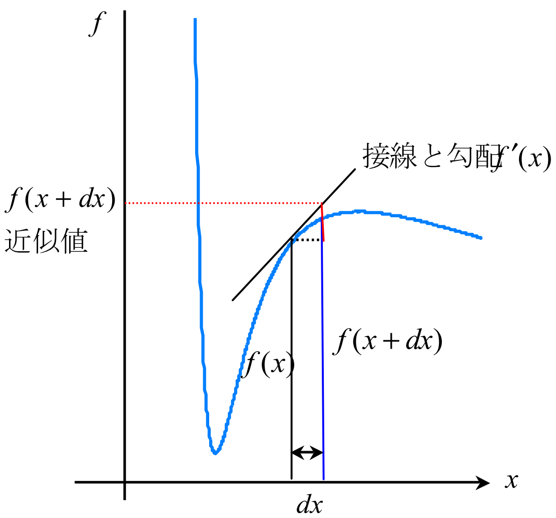
以上のような説明の後、これらの式を理解して誘導できるか、自分で確かめながらやってみるように言った。　なお、式(1)の誘導については、物理の参考書の一つを見せたが、学生は物理の授業

を履修していて、同じような本を持っているので、自分で導いてみるとのことであった。

波の伝播については、湯川秀樹博士が、何かの本で、一列に並んだネオンサインの電球が交互に時差点滅しているだけで、離れて見ていると、電球は動かないのに、光の波が左から右へ速い速度で移動しているように見える、つまり物質か何かが直接移動しなくても、固定点で振動しているだけで波が伝播し、その様子がよくわかる、といったようなことを書いておられたように思うが、このことを学生にも話して、少しでも波動の理解に役立つかなと思った。

一回生

1.（a） 式(I) が近似式として成立することを示せ、という意味に理解すると、例えば図に示すような関数 f の $x+dx$ における近似値はどのように表わされるかを、考えればよい。



関数 f の点 x における接線の勾配は $f'(x)$ で表わされるので、点 $x+dx$ における関数の値

$f(x+dx)$ は図の赤色線の長さを $f(x)$ に足したもので近似できる。

赤色線の長さは $f'(x)\times dx$ で表わされるので $f(x+dx)$ の近似値は

$$f(x+dx)=f(x)+f'(x)\cdot dx$$

で表わせる。　つまり証明すべき式が得られた。

一方、微分の定義式（式(I-1)）から答えるのであれば（dx の代わりに微小量 h とおいてもよい）、

$$f'(x)=\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\approx\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \qquad (\mathrm{I}-1)$$

$$f'(x)\approx\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \quad\Rightarrow\quad f(x+dx)\approx f(x)+f'(x)dx \qquad (\mathrm{I}-2)$$

式(I-1)が式(I-2)のように書けるのは明らかであるから、式(I)が証明されたことになる。

（b）簡単に言うと、微分は<u>割り算</u>、積分は<u>足し算</u>なので、これらの考えを使うと、式(II) は式(II-1) のように書き換えることができる。

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{df(x)}{\cancel{dx}}\cdot\cancel{dx}=\int_a^b df \qquad (\mathrm{II}-1)$$

式(II-1)の右端の式の意味は、区間[a、b]において関数 f を式(II-2)のように細分し $(df)_i$、

$$(df)_i=f_{i+1}-f_i \qquad (\mathrm{II}-2)$$

それらを足し合わせることであるから、式(II-3)の関係が得られることは明らかである。

$$\int_a^b df = \sum_{i=1}^{n}(df)_i = \sum_{i=1}^{n}(f_{i+1} - f_i)$$
$$= (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + (f_4 - f_3) + \cdots + (f_n - f_{n-1}) + (f_{n+1} - f_n)$$
$$= f_{n+1} - f_1$$
$$= f(b) - f(a) \qquad (\mathrm{II}-3)$$

これより、式(II) が成り立つことの証明ができる、と回答。

5 月 17 日(2017) 学修相談実施報告

三回生　　男子 一名

計一名

質問内容

1. 分配率を求める実験のデーター解析で、エラーバーを付した重みつき最小自乗法を用いて、平衡定数等解析パラメーターの最適値を求めなければならないが、どうすればよいか。

回答内容

1. 学生はエクセルを用いた線形解析や gnuplot のことをほとんど知らなかったので、簡単にエクセルの線形最小自乗法を用いて学生のデーターを解析する方法を簡単に説明し、

(i) 線形最小自乗法を用いてフィットした直線 $y = ax + b$ の最適パラメーター a、b には誤差があること、それを簡単に理解するには、以下のようにすればよい。 データーから任意に 2 点を選び出し、2 点を通る直線の勾配と切片を求める。 任意の 2 点を選び出す方法は ${}_nC_2$ 通りあるので、これら総てについて、直線の勾配と切片の値を求め、それらの平均値と分散を求める。 平均値が最適値であり、分散が最適パラメーター a、b に伴う誤差と考えると、最適パラメーター a、b に随伴する誤差の意味を簡単に理解することができる。

(ii)エラーバーを付した重みつき最小自乗法は通常のエクセルでは利用できないので、gnuplot を使えばよい。しかし、当日はその場で gnuplot は利用できなかったし、学生は来週の学修相談では間に合わないというので、自分で gnuplot をダウンロード（フリー）するか、情報教育センターのパソコンにはインストールされているのでそれを用いればよい、また、実験のサブテキスト(実験データを正しく扱うために、化学同人)にはデーター解析のことが詳しく説明されているので、よく読んでおくように言った上で、極く簡単に gnuplot も用いればどのような解析ができるのか、手持ちのプロット図を見せて説明するだけに終わった。

(iii)データーの重みについては、重みの付け方の説明をした後、簡単にその効果を理解するには、エクセルを用いてでも、重み（丸めた整数になるが）に比例する数だけ同じデーターを測定点として用いて(例えばデーター d_i の重みが 3 とすると、用いるデーターの中に d_i が、・・・・ d_i、d_i、d_i ・・・

と3回現れる）最小自乗法を適用し、得られた最適パラメーターの値が、重みを付けない場合と比べて、どの程度変わるかを見ればよい、と回答した。

以上