5.25/2015　学修相談実施報告

来室学生

　二回生　　男子　二名

　一回生　　男子　三名

　計五名

質問内容

二回生

1. 教科書（マッカーリ・サイモン）の図 19.5 に示された理想気体の P–V サイクルで、いろいろな過程の仕事エネルギー、熱エネルギー、内部エネルギー、エントロピーの変化は計算できるようになったが、その他の熱力学量の変化量を求めるところが正しくできていないので教えてほしい（二名）。

一回生

1. 線形代数の教科書の問題（下記）で、変数 $x,\ y$ の一次式を行列要素としてもつ 3 行 3 列の行列 $A$ の Rank を1、または2とするとき、それぞれについて $x,\ y$ の満たす関係を求め、結果を図で表わすよう求められている。 自分で解いてみたが、正しく解けているかどうか、見てほしい（一名）。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & y-1 & 2x \\ -x & -x & y-4 \end{pmatrix}$$

2. 授業で、仕事エネルギー、熱エネルギー、$PV$–サイクルなどを習っているが、$-PdV$ が仕事エネルギーになるところが理解できていない（二名）。

回答内容

二回生

1. 差を表わす $\Delta$ と微分を表わす $d$ の区別が理解できていない。 だから、内部エネルギーの変化量 $\Delta U=\Delta W+\Delta Q$ を、指定された経路について、$\Delta W$ と $\Delta Q$ とから求めることはできるが、$\Delta H$ 、$\Delta A$ 、$\Delta G$ を求めることができないでいる。 例えば、$\Delta H$ は以下の式（1）で与えられるが、

$$\Delta H=\Delta(U+PV)=\Delta U+\Delta(PV) \qquad (1)$$

$\Delta$は微分ではないので、$\Delta(PV)$は式(2)のように表わすことはできない。

$$\Delta(PV) \neq P\Delta V + V\Delta P \qquad (2)$$

同様に$\Delta A$は式(3)で与えられ、

$$\Delta A = \Delta(U - TS) = \Delta U - \Delta(TS) \qquad (3)$$

$\Delta(TS)$は式(4)で与えられるが、エントロピーの値（絶対値）は普通わからないので、

$$\Delta(TS) = T_2 S_2 - T_1 S_1 \qquad (4)$$

式(3)から$\Delta A$を求めることはできない（問題にできない）。

ただし、等温過程では$\Delta(TS)$は式(4′)のように書けるので、

$$\Delta(TS) = T\Delta S \qquad (4')$$

$\Delta A$をエントロピーの変化量から求めることはできる。

以上、$\Delta$の意味に注意することと、$H$、$A$、$G$が$dU = TdS - PdV$の式からルジャンドル変換を用いて容易に導けることを覚えれば、少なくとも図 19.5 に関する問題には答えることができる、と回答。

一回生

１．学生の解答を見ながら、私のわかる範囲内で正しく解けていること確認、教科書の巻末の解答とも照合したが、付け加えることはなく、正しく解けていると回答した。

２．仕事エネルギー$W$は（力＝$F$）×（移動距離＝$x$）で与えられる。一方、圧力$P$は（単位面積当たりの力$P = F/S$）で定義される、と説明。　実際、圧力の単位は$\mathrm{N/m^2}$になっていることを、学生に単位表で確認させた。したがって、移動距離を微小距離$dx$とすると、仕事エネルギーは下式のように$P \times dV$に比例することがわかる。

$$W = F \times dx = P \times S \times dx = P \times dV$$

熱力学では、考えている系を中心に熱力学量の正負を決めるので、気体が膨張するときには、膨張の仕事エネルギーを失うので、仕事エネルギーの変化を、気体を中心にして、$\delta W = -P \times dV$と表わす。 また、$P$-$V$ 図を用いて種々の過程が表わされているとき、経路の下の面積が、その経路に伴う仕事エネルギーの変化量になる。 その正負は系を中心に決めるとよい、と回答。 計算問題はまず自分で解いてみるように言った。

5.27/2015　学修相談実施報告

来室学生

　一回生　　男子　一名

　　　　　　女子　二名

　計三名

質問内容

一回生

1. 前回の質問の続きで、仕事エネルギー、熱エネルギーの計算は理解できるようになったが、授業の課題で、別の $P$-$V$ サイクルについて、内部エネルギーの変化を求める問題を解いたが、部分的にしか解けない。 解答と合わせて読んでもわからないので教えてほしい(一名)。
2. 授業の課題で $x,\ y$ を変数とする関数 $f(x,\ y)$ の全微分が下式で表わされることを証明する問題が全くわからない（二名）。

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

回答内容

1. 質問は理想気体を作業物質として、$P$-$V$ 図で矩形の辺に沿う経路および対角方向に曲線経路を経て対角に到達する種々の経路について、仕事エネルギー、熱エネルギー、内部エネルギーを与えられた条件で計算する問題で、学生が十分に理解していなかった点は、(i)理想気体の内部エネルギーが温度だけの関数になっていること、(ii)等温過程では $\varDelta U = 0$ であること、そして(iii)問題の各経路で $P,V,T$ の変数で何が変わっているかを把握できていない、ことであった。これらを指摘した後で、学生は解答を自分でチェックし、理解できたと納得した。

2. 微分と導関数の定義を１変数の場合、　２変数以上の場合に分けて説明。

   最初に１変数の場合を以下の具体例で微分の意味を説明。

$$y = f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$dy = f(x+dx) - f(x) = 2xdx + 2dx + (dx)^2 \approx (2x+2)dx$$　　微

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$　　１次導関数 分微の比　　微分係数

   次に２変数の場合、例えば下の $x, y$ の関数で微分（全微分）を計算させ、

$$z = f(x, y) = x^2 + 2xy + x + y^2 + 5y$$
$$dz = 2xdx + 2ydx + 2xdy + dx + 2ydy + 5dy$$
$$= (2x + 2y + 1)dx + (2x + 2y + 5)dy$$
$$(dz)_y = (2x + 2y + 1)(dx)_y \quad \Rightarrow \quad \frac{(dz)_y}{(dx)_y} = (2x + 2y + 1)$$
$$(dz)_x = (2x + 2y + 5)(dy)_x \quad \Rightarrow \quad \frac{(dz)_x}{(dy)_x} = (2x + 2y + 5)$$

$dz$ を全微分、$(dz)_y$、$(dz)_x$、・・・を偏微分、偏微分の比が $\frac{(dz)_y}{(dx)_y} \equiv \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$、・・・・偏導関数であることを説明した後、一般的に関数を $f(x, y)$ として、全微分、偏微分の一般形　を以下のように説明し、証明すべき式が得られる、と回答した。

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y) + f(x + dx, y) - f(x, y)$$
$$f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y) = \frac{f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y)}{dy} \times dy = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_x dy = f_y dy$$
$$f(x + dx, y) - f(x, y) = \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx} \times dx = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_y dx = f_x dx$$

（以上）