

7月6日(2021) 学修相談実施報告

Zoom on-line 参加者

四回生 男子 一名

計一名

質問内容

質問内容

四回生

1. 前回の質問への回答に基づき、質問の(iii)、(iv)、(v)の問題を自分で再度考えてみたが、矢張りよくわからない。断熱過程の  $P, V, T$  の関係を導くところから詳しく説明してほしい。

回答内容

1. 断熱過程の  $P, V, T$  の関係は、簡単には内部エネルギーの微分である式(1)と、理想気体の場合には、内部エネルギーの温度変化が  $C_v dT$  と表わされることから、式(2)の関係があるので、

$$dU = TdS - PdV \quad (1)$$

$$C_v dT = TdS - PdV \quad (2)$$

断熱過程では  $dS = 0$  とおいて、理想気体の状態方程式から以下の式を経て、式(3)が  $P, V, T$  の関係を表わす式として得られる(「注1」参照)。  $C_v$  は温度に依存しない定数としていることに注意。

$$C_v dT = -\frac{RT}{V} dV \Rightarrow \frac{C_v}{T} dT = -\frac{R}{V} dV \Rightarrow C_v \ln T = -R \ln V + const.$$

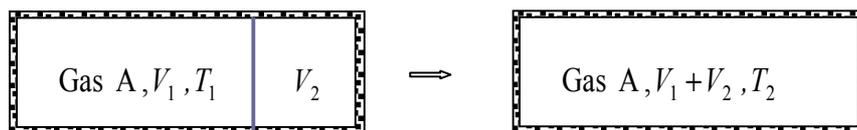
$$\ln T_1 + \frac{R}{C_v} \ln V_1 = \ln T_2 + \frac{R}{C_v} \ln V_2$$

$$T_1 (V_1)^{\frac{R}{C_v}} = T_2 (V_2)^{\frac{R}{C_v}} \Rightarrow TV^{\frac{R}{C_v}} = TV^{\frac{C_p - C_v}{C_v}} = TV^{\gamma - 1} = \text{一定} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1 \quad (3)$$

これより、図に示す断熱容器内での気体の膨張による温度変化は、式(4)で表わされることがわかる。また、断熱過程で、他に不可逆過程がないので、エントロピー変化  $\Delta S$  はゼロである。

$$T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 (V_1 + V_2)^{\gamma - 1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_1 + V_2} \right)^{\gamma - 1} \quad (4) \text{断熱膨張により温度は下がる。}$$

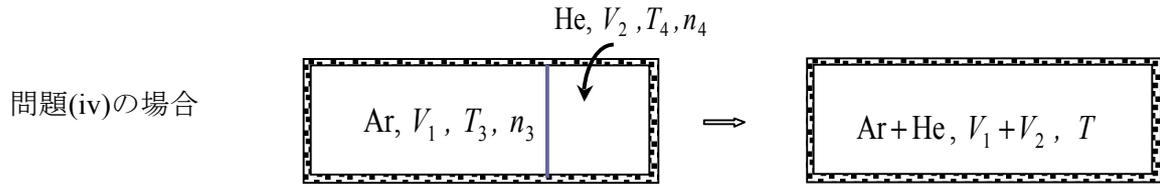
問題(iii)



式(4)が導けることが肝要、と回答。ただし熱容量が温度によらないとしているので、問題の酸素の場合の解答にはなっていない(「注2」参照)。

次に(iv)の場合、図のように最初 Ar と He が隔壁を隔てて分けられている。隔壁を取り除い

て断熱的に気体が混合したとき、混合後の温度やエントロピー変化は、(iii)で求めたように、(a)それぞれの気体を断熱的に膨張させた後、到達温度は気体毎に異なるので、その後2つの気体が(b)熱的平衡に達するとすればよい。



まず、(a)で到達温度を  $T'_3$ 、 $T'_4$  とすると、それらは式(5)、(6)で与えられる。2つの気体は単原子の理想気体なので、熱容量は温度に無関係としてよい。

$$\text{Ar, He} : \gamma = 5R/2/3R/2 = \frac{5}{3} = 1.67$$

$$\text{Ar} : PV_1 = n_3RT_3 \quad T'_3 = T_3 \left( \frac{V_1}{V_1 + V_2} \right)^{\gamma-1} \quad (5)$$

$$\text{He} : PV_2 = n_4RT_4 \quad T'_4 = T_4 \left( \frac{V_2}{V_1 + V_2} \right)^{\gamma-1} \quad (6)$$

(b)の過程は、温度の違う二つの物体が、接触により放熱・吸熱により温度平衡に達する場合に、その温度とエントロピー変化を求める問題と同じようにして、平衡温度  $T$  とエントロピー変化  $\Delta S$  を求めればよい。具体的には計算は以下のようなになる、と回答。

熱エネルギーの変化に伴うエントロピー変化は式(7)で表わされるので、

$$dS = \frac{\delta q}{T} = \frac{nC_V}{T} dT \quad (7)$$

Ar および He 気体間の熱エネルギー移動による温度変化に伴うエントロピー変化は、それぞれ式(8)、(9)で与えられる。

$$S_{\text{Ar}}(T) - S_{\text{Ar}}(T'_3) = n_3 C_V \ln \frac{T}{T'_3} \quad (8)$$

$$S_{\text{He}}(T) - S_{\text{He}}(T'_4) = n_4 C_V \ln \frac{T}{T'_4} \quad (9)$$

また、平衡温度は熱エネルギーの授受が等しいことから、式(10)で表わされる。

$$T = \frac{n_3 T'_3 + n_4 T'_4}{n_3 + n_4} \quad (10) \quad \because n_3 C_V (T - T'_3) + n_4 C_V (T - T'_4) = 0$$

したがって、これらの式より熱の移動（不可逆過程）に伴うエントロピー変化は、式(11)で表わされることがわかる。

$$\begin{aligned} \Delta S &= \langle S_{\text{Ar}}(T) - S_{\text{Ar}}(T'_3) \rangle + \langle S_{\text{He}}(T) - S_{\text{He}}(T'_4) \rangle = n_3 C_V \ln \frac{T}{T'_3} + n_4 C_V \ln \frac{T}{T'_4} \\ &= n_3 C_V \ln \frac{n_3 T'_3 + n_4 T'_4}{n_3 + n_4} \frac{1}{T'_3} + n_4 C_V \ln \frac{n_3 T'_3 + n_4 T'_4}{n_3 + n_4} \frac{1}{T'_4} \quad (11) \end{aligned}$$

「注1」一般的には、断熱過程の  $P, V, T$  の関係を表わす式は、 $(\partial P / \partial V)_S$  や  $(\partial V / \partial T)_S$  を  $P, V, T$  で表わし、これらの微分係数を積分して求めればよい。

「注2」単原子分子以外で、熱容量が温度に依存し、 $C_V = a_0 + b_0 T$  と表わされるの場合、断熱膨

張による温度変化の式は  $\frac{C_V}{T} dT = -\frac{R}{V} dV$  に  $C_V = a_0 + b_0 T$  を代入して積分を求めると、答えは得られるが、断熱膨張後の温度  $T_2$  は、以下の式から分かるように解析的には求められない(初期条件の値  $T_1, V_1, V_2$  で簡単に表わせない)。

$$a_0 \ln T + b_0 T = -R \ln V + \text{const.}$$

$$a_0 \ln T_1 + b_0 T_1 + R \ln V_1 = a_0 \ln T_2 + b_0 T_2 + R \ln(V_1 + V_2)$$

$$a_0 \ln \frac{T_1}{T_2} + b_0 (T_1 - T_2) + R \ln \frac{V_1}{(V_1 + V_2)} = 0 \quad \text{簡単には解けなく}$$

したがって、問題(iii)、(v)には簡単な式で答えることはできない、(iv)でみた Ar と He の断熱混合の問題は、問題としては難しいが、よい問題なので、しっかり理解すると良い、と回答。

7月8日(2021) 学修相談実施報告

Zoom on-line 参加者

四回生 男子 一名

計一名

質問内容

1. 水素の核スピンの量子状態、磁場との相互作用とエネルギー準位、分布と吸収強度、遮蔽効果、スピンスピン相互作用、等に関する問題で、設問が5つあるが、よく理解できていないので、問題文に沿って問題の解説をしてほしい。説明を受けて、各問題を自分で解いてみる。

回答内容

1. 問題はいずれも NMR の基礎知識と理解に関するものであった。最も基礎になる考え方のところ、理解が十分ではなかったので、学生の希望通り、問題文と設問に沿って、解答するのに必要な考え方を説明し、学生の解答を待って、後日それをチェックすることにした。

以上