Complex function, Cauchy-Rieman conditions, Cauchy theorem, Residue theorem, Cauchy principal value, Delta Function

M. Yamamoto

July 28, 2006

実数の関数の積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ を複素平面に拡張すると容易に計算できることが多い。ここでは，その計算を行う前に少々準備をする。

Fig.1 にあるように，実数軸 x と虚数軸 y を考える。複素数 z は，$z = x + iy$ で与えられる。ここで，$x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z), i = \sqrt{-1}$ である。また，z は複素平面内での原点からの距離 r と実軸 x からの角度 θ で，$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$ とも表される。

複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の微分を考える。ただし，$u(x, y)$ と $v(x, y)$ は実関数である。

$$\frac{df(z)}{dz} \equiv \lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta z\to 0}\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{z + \delta z - z} \tag{1}$$

$$\delta z = \delta x + i\delta y \tag{2}$$

$$\delta f = \delta u + i\delta v \tag{3}$$

$$\frac{\delta f(z)}{\delta z} = \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y} \tag{4}$$

In the limit of the path (A), $\delta x = 0, \delta y \to 0$

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta y\to 0}\frac{\delta u + i\delta v}{i\delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5}$$

In the limit of the path (B), $\delta y = 0, \delta x \to 0$

$$\lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u + i\delta v}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6}$$

The above two equations should be identical, then we get the **Cauchy-Rieman conditions**.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

ある領域で，複素関数 $f(z)$ が微分可能であるとき，関数 $f(z)$ はその領域で**正則** (*regular*) であるという。

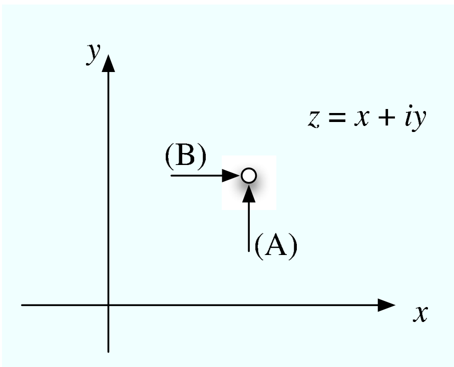

Figure 1: Complex plane and Cauchy-Rieman condition

$f(z)$ は連続で z_0 から z_N までをつなぐ曲線 C が与えられたとする。複素関数 $f(z)$ の線積分 $\int_C f(z)dz$ は，曲線 C を $z_0, z_1, z_2, ...z_{N_1}, z_N$ で表されるとすると

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\Delta z\to 0}\sum_i f(z_i)\Delta z_i, \qquad \Delta z_i = z_i - z_{i-1} \tag{8}$$

今，C を $f(z)$ が正則な領域を囲む閉曲線の場合を考える。$\oint_C dz f(z) = 0$ を証明しよう。

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy) = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) \tag{9}$$

一般の閉曲線の線積分は，Fig.2 に示した微少要素回りの線積分 c の重ね会わせになるので，微少要素回りの線積分 c を考えて，その後全領域で積分すればよい。$\oint_c udx$ の場合は経路 (II)(IV) では $dx = 0$ のため経路 (I)(III) のみを考えればよい。

$$\begin{aligned}\oint_c udx &= \frac{u(x_0,y_0)+u(x_0+dx,y_0)}{2}dx + \frac{u(x_0+dx,y_0+dy)+u(x_0,y_0+dy)}{2}(-dx)\\ &= -\frac{dx}{2}[u(x_0,y_0+dy)-u(x_0,y_0)+u(x_0+dx,y_0+dy)-u(x_0+dx,y_0)]\\ &= -\frac{dx}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}|_{x_0,y_0}dy + \frac{\partial u}{\partial y}|_{x_0+dx,y_0}dy) \simeq -\frac{\partial u}{\partial y}dxdy \end{aligned}\tag{10}$$

$-\oint_c vdy$ の場合は経路 (I)(III) では $dy = 0$ のため経路 (II)(IV) のみを考えればよい。

$$\begin{aligned}-\oint_c vdy &= -\frac{v(x_0+dx,y_0)+v(x_0+dx,y_0+dy)}{2}dy - \frac{v(x_0,y_0+dy)+v(x_0,y_0)}{2}(-dy)\\ &= -\frac{dy}{2}[v(x_0+dx,y_0)-v(x_0,y_0)+v(x_0+dx,y_0+dy)-v(x_0,y_0+dy)]\\ &= -\frac{dy}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}|_{x_0,y_0}dx + \frac{\partial v}{\partial x}|_{x_0,y_0+dy}dx) \simeq -\frac{\partial v}{\partial x}dxdy \end{aligned}\tag{11}$$

従って，

$$\oint_c (udx - vdy) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy = 0 \tag{12}$$

最後の式では Cauchy-Rieman の関係式を用いた。同様に，

$$i\oint_c (vdx + udy) = i\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy = 0 \tag{13}$$

となる。従って，ここで **Cauchy の定理**，すなわち，C を $f(z)$ が正則な領域を囲む閉曲線の場合

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{14}$$

を得る。

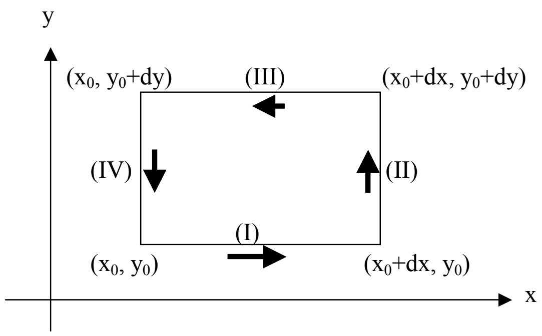

Figure 2: Contour c

$f(z)$ が $z = z_0$ で正則でなく特異点をもつ場合を考える。以下のように書ける時

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \phi(z) \tag{15}$$

$f(z)$ は，k 位の**極 (pole)** をもつという。ここで，$\phi(z)$ は z_0 で正則である。

$z = z_0$ において一位の極をもつ関数について Fig.3 の曲線での積分を求めよう。閉曲線のなかの領域では正則であるので

$$\oint \frac{1}{z - z_0} = 0 \tag{16}$$

となる。経路 C_1 と C_2 をつなぐ線において行き帰りで積分はお互い消し合うので

$$\oint \frac{1}{z - z_0} = \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} + \oint_{C_2} \frac{1}{z - z_0} = 0 \tag{17}$$

C_2 は z_0 を取り囲む円であり，$z - z_0 = re^{i\theta}$ とおけば，$dz/d\theta = ire^{i\theta}$ なので

$$\oint_{C_2} \frac{1}{z - z_0} = \int_{2\pi}^{0} d\theta \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} = i \int_{2\pi}^{0} = -2\pi i \tag{18}$$

C_1 は反時計回りで C_2 は時計回りであることに注意。従って，$z = z_0$ を囲む任意の閉曲線（反時計回り）では

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} = 2\pi i \tag{19}$$

となる。

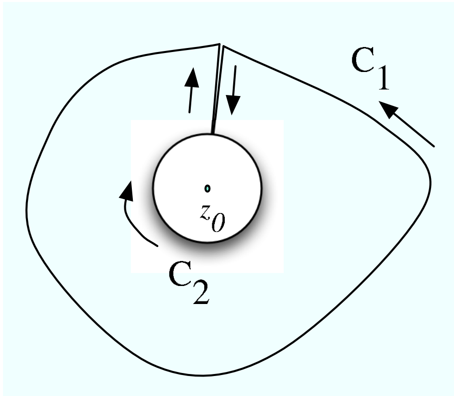

Figure 3: Residue theorem

$f(z) = 1/(z - z_0)^n, (n = 2, 3, 4, ...)$ の場合

$$\oint_{C_2} \frac{1}{(z - z_0)^n} = \int_{2\pi}^{0} d\theta \frac{ire^{i\theta}}{r^n e^{in\theta}} = \frac{i}{r^{n-1}} \int_{2\pi}^{0} e^{i(1-n)\theta} = 0 \tag{20}$$

すなわち

$$\oint_{C_1} \frac{1}{(z - z_0)^n} = 0 \tag{21}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \phi(z) \\ \oint_C f(z) dz &= 2\pi i a_{-1} \end{aligned} \tag{22}$$

一位の極だけが残る**留数の定理 (Residue theorem)** が得られる。$f(z)$ が $z = z_0$ で一位の極を持つときは，

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \{(z - z_0) f(z)\} \tag{23}$$

となる。

$f(z)$ が z_0 で正則な時，$\oint_C f(z)/(z-z_0)dz$ を求めよう。

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0}\{(z-z_0)\frac{f(z)}{z-z_0}\} = f(z_0) \quad (24)$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \quad (25)$$

上の式を **Cauchy の積分公式**という。

積分の経路上に一位の pole がある場合，Fig.4 に示すように時計回りに回避する方法と反時計回りに回避する方法がある。それぞれ，半円の寄与なので

$$\pi i a_{-1} \quad : \text{counterclockwise} \quad (26)$$

$$-\pi i a_{-1} \quad : \text{clockwise} \quad (27)$$

の値を与える。

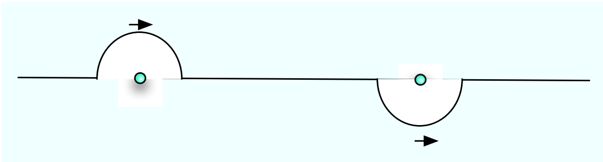

Figure 4: Bypass the poles on the contour

例として，実軸上の x_0 に一位の極がある $f(z)/(z-x_0)$ 実数軸上で積分する。閉曲線にするため $f(z)$ は複素面の上半面か下反面を通る必要があるが，積分がゼロになる経路を選ぶ。一位の極での留数は,$a_{-1} = \lim_{z\to x_0}(z-x_0)f(z)/(z-x_0) = f(x_0)$ 今, 積分経路を，実軸，C_1(時計回り）, 実軸，C' となるように選ぶと閉曲線内は正則であるので

$$0 = \oint \frac{f(z)}{z-x_0}dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-R}^{x_0-\delta}dx + \int_{C_1}dz + \int_{x_0+\delta}^{R}dx + \int_{C'}dz\right]\frac{f(z)}{z-x_0} \quad (28)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-R}^{x_0-\delta}dx + \int_{x_0+\delta}^{R}dx\right]\frac{f(x)}{x-x_0} - \pi i f(x_0) + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-x_0}iRe^{i\theta}d\theta \quad (29)$$

$$= \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{f(x)}{x-x_0} - \pi i f(x_0), \qquad \lim_{R\to\infty} f(Re^{i\theta}) = 0 \quad (30)$$

ここで，P は Cauchy の主値積分をあらわす。被積分関数は $x = x_0 - \delta$ で負に発散し，$x = x_0 + \delta$ で正に発散するが，両者の和を求めるとお互いにキャンセルして有る値に収束する。

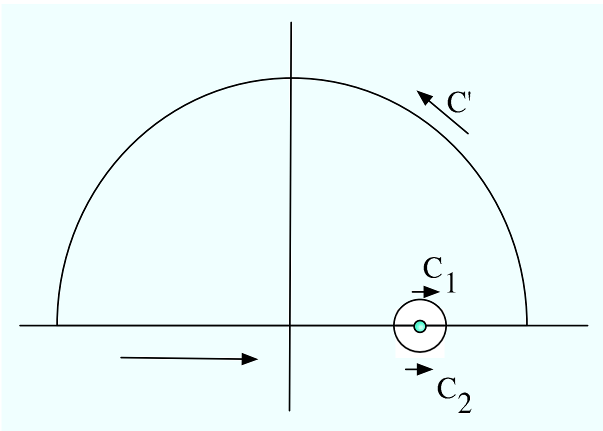

Figure 5: Bypass the poles on the contour

積分経路を，実軸，C_2（反時計回り）, 実軸，C' となるように選ぶと閉曲線内に特異点を含むので

$$2\pi i f(x_0) = \oint \frac{f(z)}{z-x_0}dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-R}^{x_0-\delta}dx + \int_{C_2}dz + \int_{x_0+\delta}^{R}dx + \int_{C'}dz\right]\frac{f(z)}{z-x_0} \quad (31)$$

$$= \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{f(x)}{x-x_0} + \pi i f(x_0), \quad (32)$$

どちらの経路をとっても

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0} = \pi i f(x_0) \tag{33}$$

となる。

Fig.5 で経路を C_1 にとることは特異点を実軸上の x_0 から $\lim_{\epsilon\to 0}(x_0 - i\epsilon)$ に移動することと等価と考えられる。

$$\oint \frac{f(z)}{z-(x_0-i\epsilon)}dz = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0} - \pi i f(x_0) \tag{34}$$

また，Fig.5 で経路を C_2 にとることは特異点を実軸上の x_0 から $\lim_{\epsilon\to 0}(x_0 + i\epsilon)$ に移動することと等価と考えられる。

$$\oint \frac{f(z)}{z-(x_0+i\epsilon)}dz = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0} + \pi i f(x_0) \tag{35}$$

今，$x_0 = 0$ とすれば

$$\oint \frac{f(z)}{z \pm i\epsilon}dz = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \mp \pi i f(0) = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \mp \pi i \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x) \tag{36}$$

実軸上の経路のみを考えると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon} = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \mp \pi i \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x) \tag{37}$$

$1/(x \pm i\epsilon)$ を $f(x)$ に作用する演算子とみなすと

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathrm{P}\frac{1}{x} \mp \pi i \delta(x) \tag{38}$$

となる。