

以下の 1)-4)の級数の和についてはよく用いられるが、公式はすぐに忘れるため、公式を覚えるよりは式を最初から導くのがよい。

1) 等差級数： $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d] = \sum_{k=1}^n [a+(k-1)d]$

k の和に関しての昇順と降順に並べ和をとる。

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d] \\ S_n &= [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \dots + (a+d) + a \\ 2S_n &= n[2a+(n-1)d] \\ S_n &= na + \frac{n(n-1)}{2}d \end{aligned}$$

$a=1, d=1$ の場合

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

となる。

2) 等比級数： $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \sum_{k=1}^n ar^{k-1}$

この場合は、 S_n に r を乗じ S_n から引き算する。

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ rS_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \\ S_n - rS_n &= a - ar^n \\ S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \end{aligned}$$

ただし、 $r=1$ の時は、 $S_n = na$ となる。

また、 $|r| < 1$ の時 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ なので、 $S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a}{1-r}$ となる。

3) 2乗の和： $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$

$(k-1)^3 - k^3 = -3k^2 + 3k - 1$ を考える。 k を 1 から n まで和をとる。左辺は、 $(0^3 - 1^3) + (1^3 - 2^3) + (2^3 - 3^3) + \dots + [(n-2)^3 - (n-1)^3] + [(n-1)^3 - n^3] = 0^3 - n^3$ となる。

右辺は $-3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = -3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n$ となる。従って、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

4) 3乗の和 : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3$ は,

$$\begin{aligned}(k-1)^4 - k^4 &= (k^2 - 2k + 1)(k^2 - 2k + 1)^2 - k^4 = k^4 - 2k^3 + k^2 - 2k^3 + 4k^2 - 2k + k^2 - 2k + 1 - k^4 \\ &= -4k^3 + 6k^2 - 4k + 1\end{aligned}$$

を考える。 k を 1 から n まで和をとる。左辺は, $(0^4 - 1^4) + (1^4 - 2^4) + (2^4 - 3^4) + \dots + [(n-2)^4 - (n-1)^4] + [(n-1)^4 - n^4] = 0^4 - n^4$

右辺は

$$-4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = -4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

となる。従って,

$$\begin{aligned}4 \sum_{k=1}^n k^3 &= n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = n^4 + n(n+1)(2n-1) + n = n(n^3 + 2n^2 + n - 1 + 1) \\ &= n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

となる。