

強電解質の電気伝導度の Onsager の式の導出

January 31, 2017

以下の導出では, A. A. Robinson, R. H. Stokes “Electrolyte Solutions: second revised edition” (Dover 2002) の本を参考にした (電気伝導を扱った本にはきちんと書いてない)。ただし, 電磁気の単位については SI(MKSA) 単位系に変換して用いた。

教科書参考 14.3 に記述されているように, Onsager は, 電気泳動効果 (粘性抵抗) と非対称効果 (緩和効果) について, デバイ-ヒュッケルの近似をつかってモル伝導率が濃度の平方根に比例して減少することを示した。今 1 種類の強電解質のみが溶解した水溶液を考えよう。カチオンを 1, アニオンを 2, 溶媒を S とする。

1 電気泳動効果

それぞれのバルクでの数密度は, $n_{1,0}, n_{2,0}, n_{S,0}$ 価数は $z_1, z_2, 0$ である。バルクでの電気的中性の条件は,

$$z_1 n_{1,0} + z_2 n_{2,0} = 0 \quad (1)$$

である。1, 2, S にかかるそれぞれの力を f_1, f_2, f_S とするとバルク中ではバランスしているので,

$$n_{S,0} f_S = -n_{1,0} f_1 - n_{2,0} f_2 \quad (2)$$

となる。

電場 (あるいは電位) がかったときを以下では考えよう。1, 2, S の数密度を n_1, n_2, n_S とする。溶媒は中性なので, $n_S = n_{S,0}$ となる。電気泳動しているイオンからみて球面座標を考える。距離 r の球殻 dr で受ける力は $(n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_S f_S) 4\pi r^2 dr$ となるが式 (2) をつかうと, $[(n_1 - n_{1,0}) f_1 + (n_2 - n_{2,0}) f_2] 4\pi r^2 dr$ となる。この力を Stokes の法則 $v = f / (6\pi\eta r)$ を用いると速度 v への電気泳動の寄与 Δv_1 が求まる。今, イオンのサイズを a とすると積分は, 以下のようになる。

$$\Delta v_1 = \frac{4\pi}{6\pi\eta} \int_a^\infty [(n_1 - n_{1,0}) f_1 + (n_2 - n_{2,0}) f_2] \frac{r^2}{r} dr = \frac{2}{3\eta} \int_a^\infty [(n_1 - n_{1,0}) f_1 + (n_2 - n_{2,0}) f_2] r dr \quad (3)$$

n_1, n_2 は (5.89) であらわされるボルツマン分布 $n_i = n_{i,0} \exp[-z_i e\phi / (k_B T)]$ に従い, 電位がお大きくなければ P.96 注 2) のように指数関数は展開できて,

$$\begin{aligned} n_1 - n_{1,0} &= n_{1,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z_1 e\phi}{k_B T} \right)^n \\ n_2 - n_{2,0} &= n_{2,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z_2 e\phi}{k_B T} \right)^n \end{aligned} \quad (4)$$

となる。デバイの遮蔽長さの逆数 κ は (5.92) の b の逆数で与えられる。

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{1}{b^2} = \frac{2e^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \sum_i \frac{1}{2} n_{i,0} z_i^2 = \frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} (n_{1,0} z_1^2 + n_{2,0} z_2^2) \\ n_{1,0} z_1^2 + n_{2,0} z_2^2 &= n_{1,0} z_1^2 - \frac{z_1}{z_2} n_{1,0} z_2^2 = n_{1,0} z_1 (z_1 - z_2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$= -\frac{z_2}{z_1} n_{2,0} z_1^2 + n_{2,0} z_2^2 = n_{2,0} z_2 (z_2 - z_1)$$

$$n_{1,0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}{e^2} \kappa^2 \frac{1}{z_1 (z_1 - z_2)} = \frac{(\kappa a)^2}{a^2} \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \right)^{-1} \frac{1}{z_1 (z_1 - z_2)} \quad (6)$$

$$n_{2,0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}{e^2} \kappa^2 \frac{1}{z_2 (z_2 - z_1)} = \frac{(\kappa a)^2}{a^2} \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \right)^{-1} \frac{1}{z_2 (z_2 - z_1)} \quad (7)$$

(5.90) 式を変形すると,

$$\rho(r) = -\frac{2e^2}{k_B T} \left(\sum_i \frac{1}{2} z_i^2 n_{i,0} \right) \phi(r) = -\epsilon_0 \epsilon_r \kappa^2 \phi(r) \quad (8)$$

である。イオン i の回りの電荷 ρ_i を $r = a$ から無限大まで積分すると, 電位 $\phi_i = A_i \exp(-\kappa r)/r$ は, 部分積分を使って $[(fg)' = f'g + fg', \int f'g = fg - \int fg']$

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \rho_i(r) 4\pi r^2 dr &= -\int_a^\infty \epsilon_0 \epsilon_r \kappa^2 A_i \exp(-\kappa r) r^{-1} 4\pi r^2 dr = -z_i e \\ &= -4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \kappa^2 A_i \int_a^\infty r \exp(-\kappa r) dr = -4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \kappa^2 A_i \left\{ [\exp(-\kappa r) (-\kappa)^{-1} r]_a^\infty + \kappa^{-1} \int_a^\infty \exp(-\kappa r) dr \right\} \\ &= -4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \kappa^2 A_i \left\{ 0 + \frac{\exp(-\kappa a) a}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} [\exp(-\kappa r) (-\kappa)^{-1}]_a^\infty \right\} = -4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \kappa^2 A_i \left[\frac{\exp(-\kappa a) a}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \frac{\exp(-\kappa a)}{\kappa} \right] \\ &= -4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \kappa^2 A_i \frac{\kappa a + 1}{\kappa^2} \exp(-\kappa a) = -4\pi \epsilon_0 \epsilon_r A_i (\kappa a + 1) \exp(-\kappa a) \\ A_i &= \frac{z_i e}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a}, \quad \phi_1 = \frac{z_1 e}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a} \frac{\exp(-\kappa r)}{r}, \quad \phi_2 = \frac{z_2 e}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a} \frac{\exp(-\kappa r)}{r} \end{aligned} \quad (9)$$

この式を (3), (4) 式に代入する。 ϕ は ϕ_1 とする。すなわちカチオンがつくる電位である。

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= \frac{2}{3\eta} \int_a^\infty \left[n_{1,0} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z_1 e \phi_1}{k_B T} \right)^n f_1 + n_{2,0} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z_2 e \phi_1}{k_B T} \right)^n f_2 \right] r dr \\ &= \frac{2}{3\eta} \frac{(\kappa a)^2}{a^2} \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \right)^{-1} \int_a^\infty \left[\frac{1}{z_1 (z_1 - z_2)} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z_1 e \phi_1}{k_B T} \right)^n f_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z_2 (z_2 - z_1)} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z_2 e \phi_1}{k_B T} \right)^n f_2 \right] \\ &= \frac{2}{3\eta} \frac{(\kappa a)^2}{a^2} \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \right)^{-1} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \\ &\quad \left[z_1^n \frac{z_1^{n-1} f_1 - z_2^{n-1} f_2}{z_1 - z_2} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \right)^n \left(\frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a} \right)^n \int_a^\infty \frac{\exp(-n\kappa r)}{r^{n-1}} dr \right] \\ &= \frac{1}{6\pi\eta} \frac{(\kappa a)^2}{a^2} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \right)^{-1} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \\ &\quad \left[z_1^n \frac{z_1^{n-1} f_1 - z_2^{n-1} f_2}{z_1 - z_2} \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \right)^n \left(\frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a} \right)^n \int_a^\infty \frac{\exp(-n\kappa r)}{r^{n-1}} dr \right] \end{aligned} \quad (10)$$

となる。以下のように定義すると

$$\int_a^\infty \frac{\exp(-n\kappa r)}{r^{n-1}} dr = \frac{S_n(\kappa a)}{a^{n-2}}, \quad \psi_n(\kappa a) = (\kappa a)^2 \left(\frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a} \right)^n S_n(\kappa a) \quad (11)$$

後で用いるが S_1 は

$$S_1(\kappa a) = \frac{1}{a} \int_a^\infty \exp(-\kappa r) dr = \frac{\exp(-\kappa a)}{\kappa a} \quad (12)$$

となる。 Δv_1 は、

$$\Delta v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6\pi\eta n!} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r k_B T} \right)^{n-1} \frac{z_1^n z_1^{n-1} f_1 - z_2^{n-1} f_2}{a^n (z_1 - z_2)} \psi_n(\kappa a) \quad (13)$$

アニオンの電気泳動に対する寄与 Δv_2 は、上の式の 1 と 2 を置き換えることで得られる。もうすこし簡単な表現にすると、

$$\Delta v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_1^n z_1^{n-1} f_1 - z_2^{n-1} f_2}{a^n (z_1 - z_2)} \quad (14)$$

$$A_n = \frac{(-1)^n}{6\pi\eta n!} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r k_B T} \right)^{n-1} \psi_n(\kappa a) \quad (15)$$

ここで、 A_n は、 κa 、温度、溶媒の性質で与えられる。(14) 式には、イオンにはたらく力 f_1, f_2 は決まっていないうが、イオン伝導では、電場の強さとイオンの電荷の積で与えられる。

2 緩和効果

電場がかかると、対イオンの分布は球対称からずれる。このずれは、オフセンターにあるイオンを引き戻すので、イオンの速度を遅くする。この現象を緩和効果とよぶ。伝導をおこす x 方向の電場を X とし、 X とは反対側にはたらく緩和電場を ΔX とする。(14) 式での f_1, f_2 は、以下のように与えられる。

$$f_1 = (X + \Delta X) z_1 e, \quad f_2 = (X + \Delta X) z_2 e \quad (16)$$

この時の速度を v'_i とすると、

$$v'_i = (X + \Delta X) z_i e u_i^0 \quad (17)$$

ここで u_i^0 は無限希釈状態でのイオン i の移動度である。無限希釈状態での速度 v_i^0 は、対イオンの効果がなくなるので

$$v_i^0 = X z_i e u_i^0 \quad (18)$$

となる。(16) 式を (14) 式に代入すると、

$$\Delta v_1 = (X + \Delta X) e \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_1^{2n} - z_1^n z_2^n}{a^n (z_1 - z_2)} \quad (19)$$

$$\Delta v_2 = (X + \Delta X) e \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_1^n z_2^n - z_2^{2n}}{a^n (z_1 - z_2)} \quad (20)$$

3 Onsager の式

電気泳動と緩和の効果を両方含めると

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 + \Delta v_1 \\ &= (X + \Delta X) z_1 e u_1^0 + (X + \Delta X) e \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_1^{2n} - z_1^n z_2^n}{a^n (z_1 - z_2)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} v_1^0 &= X z_1 e u_1^0 \\ \frac{v_1}{v_1^0} &= \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \left[1 + \frac{1}{z_1 u_1^0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_1^{2n} - z_1^n z_2^n}{a^n (z_1 - z_2)} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

v_1/v_1^0 の比は、モルイオン伝導度の比 λ_1/λ_1^0 となり、移動度とモルイオン伝導度は、

$$\lambda_1^0 = |z_1|Fu_1^0 \quad (23)$$

となる。 $z_1 > 0, z_2 < 0$ なので、 $z_1 = |z_1|, -z_2 = |z_2|$ となり、

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^0} &= \left[1 + \frac{F}{\lambda_1^0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_1^{2n} - z_1^n z_2^n}{a^n (|z_1| + |z_2|)} \right] \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \\ \lambda_1 &= \left[\lambda_1^0 + F \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_1^{2n} - z_1^n z_2^n}{a^n (|z_1| + |z_2|)} \right] \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

同様に

$$\lambda_2 = \left[\lambda_2^0 + F \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z_2^{2n} - z_1^n z_2^n}{a^n (|z_1| + |z_2|)} \right] \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \quad (25)$$

モル伝導 Λ は、

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (26)$$

$$\Lambda = \left[\Lambda^0 + F \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(z_1^n - z_2^n)^2}{a^n (|z_1| + |z_2|)} \right] \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \quad (27)$$

$$\Lambda^0 = \lambda_1^0 + \lambda_2^0 \quad (28)$$

(27) 式において、 n を 1 から増加させていくことによって近似をあげていくことができる。 $n = 2$ の時、 $z_1 = -z_2$ なので $z_1^2 - z_2^2 = 0$ となり、 $n = 2$ の寄与はない。従って以下では $n = 1$ の項の寄与のみを考慮する。

$$A_1 = -\frac{1}{6\pi\eta} \psi_1(\kappa a) = -\frac{1}{6\pi\eta} (\kappa a)^2 \frac{\exp(\kappa a)}{1 + \kappa a} S_1(\kappa a) = -\frac{1}{6\pi\eta} (\kappa a)^2 \frac{\exp(\kappa a) \exp(-\kappa a)}{1 + \kappa a} = -\frac{1}{6\pi\eta} \frac{\kappa a}{1 + \kappa a} \quad (29)$$

$n = 1$ の時、式 (24), (25), (27) は、

$$\lambda_1 = \left[\lambda_1^0 - F \frac{1}{6\pi\eta} \frac{\kappa a}{1 + \kappa a} \frac{z_1^2 - z_1 z_2}{a (|z_1| + |z_2|)} \right] \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) = \left(\lambda_1^0 - \frac{F}{6\pi\eta} \frac{\kappa}{1 + \kappa a} |z_1| \right) \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \quad (30)$$

$$\lambda_2 = \left(\lambda_2^0 - \frac{F}{6\pi\eta} \frac{\kappa}{1 + \kappa a} |z_2| \right) \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \quad (31)$$

$$\Lambda = \left[\Lambda^0 - \frac{F}{6\pi\eta} \frac{\kappa}{1 + \kappa a} (|z_1| + |z_2|) \right] \left(1 + \frac{\Delta X}{X} \right) \quad (32)$$

となる。

さらに、 $1 + \kappa \simeq 1$ とし、 $\Delta X/X$ を

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{z_1 z_2 e^2}{12\pi\epsilon_0\epsilon_r k_B T} \frac{q\kappa}{1 + \sqrt{q}} \quad (33)$$

$$q = \frac{|z_1 z_2|}{|z_1| + |z_2|} \frac{\lambda_1^0 + \lambda_2^0}{|z_2| \lambda_1^0 + |z_1| \lambda_2^0} \quad (34)$$

とおく。これは Onsager が 1927 年の論文 [Z. Phys. 28 (1927) 277] で希薄溶液に対して得た結果である。(Robinson-Stokes の本では (33) 式は、 $z_1 z_2 e^2 / (3\epsilon k_B T) q\kappa / (1 + \sqrt{q})$ となっているが SI 系にすれば $12\pi\epsilon_0\epsilon_r k_B T$ としていいのか確証はもてない。) さらに、 $\Delta X/X$ と (32) 式の [...] の中の第 2 項との積も無視する。結果としての、Onsager の極限則は、

$$\Lambda = \Lambda^0 - \frac{|z_1 z_2| e^2}{12\pi\epsilon_0\epsilon_r k_B T} \frac{\Lambda^0 q\kappa}{1 + \sqrt{q}} - \frac{F}{6\pi\eta} (|z_1| + |z_2|) \kappa \quad (35)$$

$$= \Lambda^0 - \left[\frac{|z_1 z_2| e^2}{12\pi\epsilon_0\epsilon_r k_B T} \frac{\Lambda^0 q}{1 + \sqrt{q}} - \frac{F}{6\pi\eta} (|z_1| + |z_2|) \right] \kappa \quad (36)$$

となる。式(36)の κ をモル濃度や質量モル濃度であらわす。(5)式より、

$$\kappa = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2e^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \sum_i \frac{1}{2} z_i^2 n_{i,0}} \quad (37)$$

$$n_{i,0} = \frac{N_{i,0}}{V[\text{m}^3]} = \frac{N_{i,0}}{V[\text{dm}^3]/1000[\text{dm}^3 \text{ m}^{-3}]} = c_i [\text{mol dm}^{-3}] N_A [\text{mol}^{-1}] 1000 [\text{dm}^3 \text{ m}^{-3}] \quad (38)$$

$$I_c = \frac{1}{2} \sum z_i^2 c_i \quad (39)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2e^2 N_A 1000}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \sum_i \frac{1}{2} z_i^2 c_i} = \sqrt{\frac{2e^2 N_A 1000}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}} \sqrt{I_c} \quad (40)$$

$$(41)$$

となる。従って(36)式は、

$$\Lambda = \Lambda^0 - \left[\frac{|z_1 z_2| e^2}{12\pi \epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \frac{\Lambda^0 q}{1 + \sqrt{q}} - \frac{F}{6\pi\eta} (|z_1| + |z_2|) \right] \sqrt{\frac{2e^2 N_A 1000}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}} \sqrt{I_c} \quad (42)$$

となり、 $c_1 = c_2 = c$ であれば、 $I_c = (1/2)(z_1^2 + z_2^2)c$ となるので、最終的に Onsager の式は Kohlrausch の式を説明する。

$$\Lambda = \Lambda^0 - \left[\frac{|z_1 z_2| e^2}{12\pi \epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \frac{\Lambda^0 q}{1 + \sqrt{q}} - \frac{F}{6\pi\eta} (|z_1| + |z_2|) \right] \sqrt{\frac{2e^2 N_A 1000}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}} \sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}} \sqrt{c} \quad (43)$$

$$= \Lambda^0 - (\alpha \Lambda^0 + \beta) \sqrt{c} \quad (44)$$

$$= \Lambda^0 - A \sqrt{c} \quad (45)$$

Web[濃度について]で示したように、希薄溶液 (NaCl の場合は全濃度領域) で、溶液の密度 ρ [g cm^{-3}] を使って、 $c \simeq \rho m$, $I_c \simeq \rho I_m$ と近似できるので

$$\Lambda \simeq \Lambda^0 - \left[\frac{|z_1 z_2| e^2}{12\pi \epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \frac{\Lambda^0 q}{1 + \sqrt{q}} - \frac{F}{6\pi\eta} (|z_1| + |z_2|) \right] \sqrt{\frac{2e^2 N_A 1000}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T}} \sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}} \rho \sqrt{m} \quad (46)$$

$$= \Lambda^0 - (\alpha' \Lambda^0 + \beta') \sqrt{m} \quad (47)$$

$$= \Lambda^0 - A' \sqrt{m} \quad (48)$$

となる。

4 実際の解析

測定で求められた $\Lambda = \sigma/c$ (ここで σ は比伝導率 [S cm^{-1}] である。) を、 \sqrt{c} を横軸にプロットし (エラーバー付で)、線形と思われる領域について $\Lambda = \Lambda^0 - (\alpha \Lambda^0 + \beta) \sqrt{c}$ の式を、 Λ^0, α, β を 3 パラメータとして、重み付き非線形最小二乗法により求める。この方法により得られたパラメータにエラーバーがつく ($\Lambda_0 \pm \delta \Lambda_0, \alpha \pm \delta \alpha, \beta \pm \delta \beta$)。ただし、 $\delta \alpha, \delta \beta$ については、 $(\alpha \Lambda^0 + \beta)$ 全体で傾きとなるので、誤差が大きく正しい見積もりはできない (のかもしれない)。KCl 水溶液の場合の Onsager plot を下図に示す。

また、fitting とは別に、Onsager が求めた理論式も、いろんな局面で実際に使用される。岡崎敏、坂本一光「溶媒とイオン」(谷口印刷出版部) (1990) によれば、

$$\Lambda [\text{S cm}^2 \text{ mol}^{-1}] = \Lambda_0 - \left[\frac{8.20 \times 10^5}{(\epsilon_r T)^{3/2}} \Lambda_0 + \frac{82.50}{\eta (\epsilon_r T)^{1/2}} \right] \sqrt{c} \quad (49)$$

となることを報告している。ここで $\eta[\text{P}]$ は溶媒の粘度である。水溶液の場合、 $\epsilon_r = 78.3, \eta = 0.8903 \times 10^{-2} \text{ P}$, ($1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pa s} = 100 \text{ cP}$, $1 \text{ cP} = \text{mPa s}$), $T = 298.15 \text{ K}$ を代入すると、

$$\Lambda [\text{S cm}^2 \text{ mol}^{-1}] = \Lambda_0 - (0.2300 \Lambda_0 + 60.65) \sqrt{c} \quad (50)$$

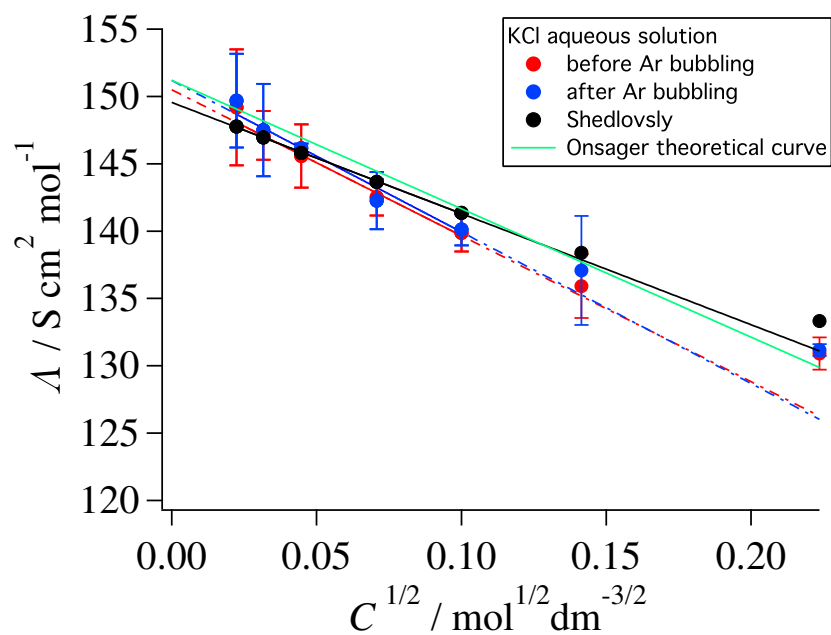


Figure 1: Onsager plot for KCl aqueous solution measured by S. Sawada(2017).

となる。 c の単位は mol dm^{-3} である。この理論式は、(我々のところで計測した) 強電解質溶液の Onsager plot を極めてよく説明し (図の緑線, 澤田壮太氏測定 2017), ある意味で理論の勝利の典型例であるといえる。