スターリングの公式: Stirling's formula

Masahiro Yamamoto

4 : 52 pm April 13, 2017

1 ゆるいバージョン: 通常はこれで OK

スターリングの公式 $\ln N! \simeq N \ln N - N, (N >> 1)$ [1]を導く。

$$\ln N! = \ln[N(N-1)(N-2)...321] = \sum_{k=1}^{N} \ln k \tag{1}$$

図に示すように $\ln x$ は x の単調増加関数である。図中の 2 つの長方形の面積と積分の関係より，k を整数とし

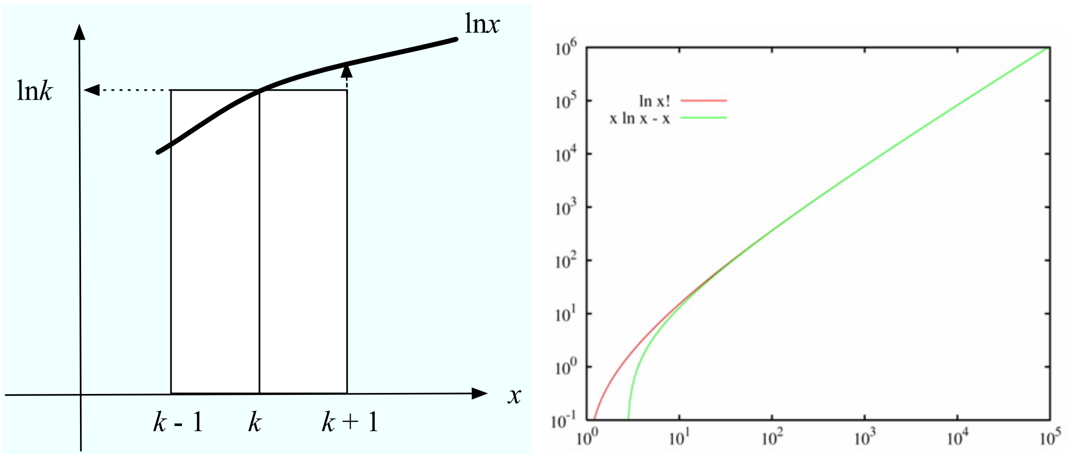

Figure 1: k vs $\ln k$(left), $\ln N!$ vs $N \ln N - N$(right)

て，以下の関係が成り立つことがわかる。

$$\int_{k-1}^{k} dx \ln x \leq [k-(k-1)] \ln k, \quad [(k+1)-k] \ln k \leq \int_{k}^{k+1} dx \ln x \tag{2}$$

$$\int_{k-1}^{k} dx \ln x \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} dx \ln x \tag{3}$$

$k = 1$ から $k = N$ まで和をとると

$$\int_{0}^{N} dx \ln x \leq \sum_{k=1}^{N} \ln k \leq \int_{1}^{N+1} dx \ln x \tag{4}$$

部分積分をつかうと[2],

$$\int_{0}^{N} dx \ln x = \int_{0}^{N} dx (x)' \ln x = [x \ln x]_0^N - \int_{0}^{N} x(1/x) dx = N \ln N - N \tag{5}$$

$$\int_{1}^{N+1} dx \ln x = [x \ln x]_1^{N+1} - \int_{1}^{N+1} x(1/x) dx = (N+1) \ln(N+1) - N \tag{6}$$

[1] ゆるい版の式。詳しくは田崎晴明「統計力学 1」の付録を参照のこと。

[2] $(fg)' = f'g + fg', fg = \int f'g + \int fg', \int f'g = fg - \int fg'$

故に，$N >> 1$ の時,

$$\ln N! \simeq N \ln N - N \tag{7}$$

以下のようにもあらわすことができる。

$$\begin{aligned} e^{\ln N!} &= e^{\ln N^N} e^{-N} && (8) \\ N! &= N^N e^{-N} = \left(\frac{N}{e}\right)^N && (9) \end{aligned}$$

2　厳しいバージョン: 中央極限定理の証明の際に用いる（小針，確率・統計入門）

以上の近似式はより正確には,

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \tag{10}$$

となるがこれを示そう。

$$N \ln N - N \leq \ln N! \leq (N+1)\ln(N+1) - N \tag{11}$$

今，$\ln N! \simeq (N+1/2)\ln N - N$ と「あたり」をつけ，そのずれを以下の様に定義する。

$$d_N \equiv \ln N! - [(N+1/2)\ln N - N] \tag{12}$$

$N+1$ の時との差をとると

$$\begin{aligned} d_{N+1} - d_N &= \ln(N+1) - (N+3/2)\ln(N+1) + (N+1) + (N+1/2)\ln N - N && (13) \\ &= -(N+1/2)\ln\frac{N+1}{N} + 1 = -(N+1/2)\ln(1+\frac{1}{N}) + 1 && (14) \\ &= -(N+1/2)[1/N - 1/(2N^2) + 1/(3N^3) - 1/(4N^4)...] + 1 && (15) \\ &= -[1 + 1/(2N) - 1/(2N) - 1/(4N^2) + 1/(3N^2) + O(N^{-3})] + 1 && (16) \\ &= -\frac{1}{12N^2} + O(N^{-3}) && (17) \\ d_{N+1} &= d_N - \frac{1}{12N^2} + O(N^{-3}) && (18) \end{aligned}$$

差 d_N は，$N \to +\infty$ である値 C に収束する。従って,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{N\to+\infty}\{\ln N! - [(N+1/2)\ln N - N]\} && (19) \\ e^C &= \lim_{N\to+\infty}\frac{N!}{N^{N+1/2}e^{-N}} && (20) \end{aligned}$$

$e^C \equiv A$ とすると,

$$\begin{aligned} A^2 &= \lim_{N\to+\infty}\frac{(N!)^2}{N^{2N+1}e^{-2N}} && (21) \\ \frac{1}{A} &= \lim_{N\to+\infty}\frac{(2N)^{2N+1/2}e^{-2N}}{(2N)!} && (22) \end{aligned}$$

この二つをかけると

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N\to+\infty}\frac{(N!)^2 2^{2N+1/2} N^{2N+1/2}}{(2N)! N^{2N+1}} && (23) \\ &= \lim_{N\to+\infty}\frac{2^{2N}\sqrt{2}}{\sqrt{N}[(2N)!/(N!N!)]} = \sqrt{2}\lim_{N\to+\infty}\frac{2^{2N}}{\sqrt{N}{}_{2N}\mathrm{C}_N} && (24) \end{aligned}$$

ここで ${}_N\mathrm{C}_r = N!/[r!(N-r)!]$ の二項係数である。$A=\sqrt{2\pi}$ となるが，まずワリスの公式を導こう。

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \sin^{n-1} x\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \mathrm{d}x \tag{25}$$

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \int f'g = fg - \int fg', f' = \sin x, f = -\cos x, g = \sin^{n-1} x \tag{26}$$

$$S_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x = (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n \tag{27}$$

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2} \tag{28}$$

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}...\frac{3}{4}\frac{1}{2}S_0, \quad S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}...\frac{4}{5}\frac{2}{3}S_1 \tag{29}$$

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -(0-1) = 1 \tag{30}$$

$$\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}...\frac{4}{5}\frac{2}{3}S_1\right) \Big/ \left(\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}...\frac{3}{4}\frac{1}{2}S_0\right) \tag{31}$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-3}...\frac{4}{5}\frac{4}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{1}\frac{2}{\pi} \tag{32}$$

$0 < x < \pi/2$ で，

$$0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \tag{33}$$

$$0 < S_{2n+1} < S_{2n} < S_{2n-1} \tag{34}$$

$$1 < \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} < \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{S_{2n-1}}{\frac{2n}{2n+1}S_{2n-1}} = \frac{2n+1}{2n} \tag{35}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = 1 \tag{36}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n-2)(2n-2)2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \tag{37}$$

最後の式をワリスの公式と呼ぶ。その式の左辺は，

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}\right] = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1}\right] = \frac{\pi}{2} \tag{38}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n)^2}\right] = \frac{2}{\pi} \tag{39}$$

また，式 (29) より

$$S_{2n}S_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}...\frac{3}{4}\frac{1}{2}S_0\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}...\frac{4}{5}\frac{2}{3}S_1 \tag{40}$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-3}{2n-2}...\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}S_1S_0 = \frac{1}{2n+1}\frac{\pi}{2} \tag{41}$$

$$\sqrt{n}S_{2n+1}\sqrt{\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{42}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \tag{43}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}S_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{44}$$

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}...\frac{4}{5}\frac{2}{3}S_1 = \frac{(2n)^2(2n-2)^2...4^2\cdot 2^2}{(2n+1)!} \tag{45}$$

$$= \frac{2^2(n)^2 2^2(n-1)^2...2^2 2^1\cdot 2^2 2^0}{(2n+1)(2n)!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_n} \tag{46}$$

式 (44) より，

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}2^{2n}}{(2n+1)_{2n}\mathrm{C}_n} \tag{47}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}\sqrt{n}}{2n+1} = 1 \tag{48}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}_{2n}\mathrm{C}_n} \tag{49}$$

従って, (20),(24) 式の $e^C = \sqrt{2\pi}$ となる。スターリングの公式は,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{\sqrt{2\pi N}N^N e^{-N}} = 1 \tag{50}$$

$$N! \simeq \sqrt{2\pi}N^{N+1/2}e^{-N} \tag{51}$$

$$\ln N! \simeq (N+\frac{1}{2})\ln N - N + \ln\sqrt{2\pi} \tag{52}$$