$\langle$Bra|Ket$\rangle$ 補足：Hermitian

The current file is: braketHermitian.tex

May 14, 2024 9:51am

N. Zettili の Quantum Mechanics: Concepts and Applications 3rd ed.(2022 Wiley) を参考に以下補足する。

関数の内積は以下のようにかける。

$$(\phi,\psi) = \int \phi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x \quad \longleftrightarrow \quad \langle\phi|\psi\rangle \tag{1}$$

ある bra には対応する ket がある

$$|\psi\rangle \qquad \longleftrightarrow \qquad \langle\psi| \tag{2}$$
$$a|\psi\rangle + b|\phi\rangle \qquad \longleftrightarrow \qquad a^*\langle\psi| + b^*\langle\phi| \tag{3}$$
$$|a\psi\rangle = a|\psi\rangle, \qquad\qquad \langle a\psi| = a^*\langle\psi| \tag{4}$$

関数の内積の重要な性質として以下のものがある

$$\langle\phi|\psi\rangle^* = \left(\int \phi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right)^* = \int \psi^*(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \langle\psi|\phi\rangle \tag{5}$$
$$\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle \tag{6}$$
$$\langle a_1\phi_1 + a_2\phi_2|b_1\psi_1 + b_2\psi_2\rangle = a_1^*b_1\langle\phi_1|\psi_1\rangle + a_1^*b_2\langle\phi_1|\psi_2\rangle + a_2^*b_1\langle\phi_2|\psi_1\rangle + a_2^*b_2\langle\phi_2|\psi_2\rangle \tag{7}$$

演算子 $\hat{A}$ をブラ・ケットに作用させると

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \langle\phi|\hat{A} = \langle\phi'| \tag{8}$$

となり，また演算子 $\hat{A}$ をブラ・ケットではさむと

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = (\langle\phi|\hat{A})|\psi\rangle = \langle\phi|(\hat{A}|\psi\rangle) \tag{9}$$

となり，演算子は前のブラあるいは後ろのケットどちらに作用してもよい。
ケットとブラの積 $|\phi\rangle\langle\psi|$ は以下の意味で演算子となる。

$$|\phi\rangle\langle\psi|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi'\rangle|\phi\rangle \tag{10}$$

複素数 α のエルミート共役は α の複素共役となる

$$\alpha^\dagger = \alpha^* \tag{11}$$

ケットまたはブラに対して，その転置複素共役 $\dagger$ は

$$(|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|, \quad (\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle \tag{12}$$

とかける。

演算子 $\hat{A}$ のエルミート共役は以下のように定義する

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* \tag{13}$$

演算子に対して転置複素共役 † は，以下のようになる。

$$(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A} \tag{14}$$
$$(a\hat{A})^\dagger = a^*\hat{A}^\dagger \tag{15}$$
$$(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|\hat{D}^\dagger\hat{C}^\dagger\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \tag{16}$$

ケットとブラの積 $|\phi\rangle\langle\psi|$ のエルミート共役は以下のようになる。

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger = |\phi\rangle\langle\psi|) \tag{17}$$

ブラとケットの中で演算子は以下のように作用する。

$$|\alpha\hat{A}\psi\rangle = \alpha\hat{A}|\psi\rangle, \quad \langle\alpha\hat{A}\psi| = \alpha^*\langle\psi|\hat{A}^\dagger \tag{18}$$

$\langle\alpha\hat{A}^\dagger\psi| = \alpha^*\langle\psi|(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \alpha^*\langle\psi|\hat{A}$ 　なので以下のように書くことができる

$$\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\phi\rangle \tag{19}$$

演算がエルミート演算子であれば, (13) 式より

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger, \qquad \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle^* \tag{20}$$

となる。

演算子 $\hat{P}$ が，エルミートでその二乗に等しいなら $\hat{P}$ 射影演算子と呼ばれる

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P}, \quad \hat{P}^2 = \hat{P} \tag{21}$$

$|\psi\rangle\langle\psi|$ がエルミートであることは以下のように示せる。

$$(|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{22}$$

その二乗は

$$(|\psi\rangle\langle\psi|)^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{23}$$
$$\text{if} \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{24}$$