

波動方程式

甲南大学理工学部機能分子化学科 山本雅博

This manuscript is modified on April 6, 2023 7:05 pm

この文章は基本的に有山の教科書 [1] を参考にして作成した。記号やわかりにくいところは一部
改変してある。

1 波動とは

波は、媒質のある物理量が周期的に変化しがそれが伝播（でんぱ）いくと考えられる。音波なら媒質
は空気の密度が波の進行方向で粗密になって伝播していくし（縦波）、電磁波なら電場と磁場が波の
進行方向と直角に変位して伝播していく（横波）。このように波動は、空間と時間で指定される関数に
よって表される。

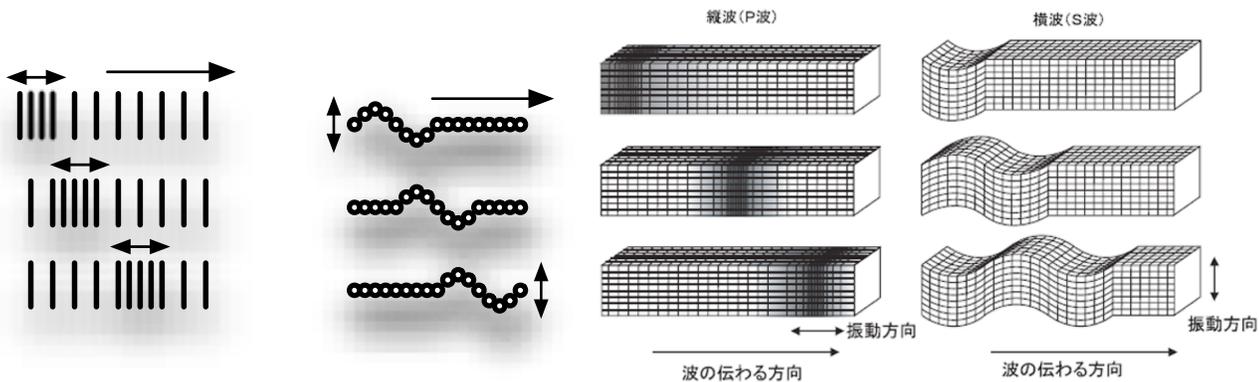


Figure 1: 縦波 (longitudinal wave) と横波 (transverse wave). 波の進行方向に対して、変位が平行であるのが縦波で、変位が進行方向と垂直であるのが横波である。地震波では、縦波 (P 波) は毎秒約 7km、横波 (S 波・表面波) は毎秒約 4km の速さで伝わる。この伝播速度差を利用して、震源に近い地点における P 波の観測に基づき、後から来る S 波の伝播を時系列的に予測し、震源からある程度以上 (P 波と S 波の時間差が充分に開くほど) 離れた地点に対しては、その到達前に予測を発表することができる。(緊急地震速報) 一番右の図は地震調査推進本部素材集より

今、波の進行方向を x 方向とし、ある時間 t 場所 x での変位を $u(x, t)$ とする。時間 $t = t_0 = 0$ での変位を $f(x)$ とすれば、 $f(x) = u(x, 0)$ である。今、この変位は**一定の形を保ったまま**一定の速度 v で $+x$ 方向に伝播していくとする。(Fig.2) (波が弱まったり形が変化することもあるが短い時間の範囲では近似的に成立するとする。)

$$u(x, \delta t) = f(x - v\delta t) \quad (1)$$

$$u(x, -\delta t) = f(x + v\delta t) \quad (2)$$

δt を t で置き換えると

$$u(x, t) = f(x - vt), \quad \text{propagate } +x \text{ direction} \quad \longrightarrow \quad (3)$$

となる。変位が $-x$ 方向に進む場合は、 v を $-v$ に変えればよく

$$u(x, t) = f(x + vt), \quad \text{propagate } -x \text{ direction} \quad \longleftarrow \quad (4)$$

となる。(Fig.3)

Fig.2,3では、 f として波束 (波がある部分に集中している) の例を挙げたが、どのような関数形でもよい。詳細はフーリエ級数やフーリエ変換の解説等を参考にしてほしいが、波束やその他の一般の関数は、周期的な波の重ね合わせで表現できる。例えば、Fig.4 にガウス波束の例を示した。ある波長を中心としてガウス分布の大きさで正弦波を重ね合わせるとガウス波束が再現できる。

従って、一般的な波の性質を調べるには、周期的な波についてその性質を調べておけば、一般の関数についても解析が可能になる。周期的な波は、一般に

$$Ae^{i(kx - \omega t)} = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t) \quad (5)$$

と書ける。この Euler の式の証明は Appendix にある。cos, sin は周期 2π の関数である。

$t = 0$ とき、 $kx = 0, 2\pi$ で一周期となる。 $x = 0$ から**波長 (wavelength)** λ で一周期となるので、 $k\lambda = 2\pi$, $k = 2\pi/\lambda$ となる。 k は、**波数 (wavenumber)** と呼ばれる。

また、 $x = 0$ のとき、 $\omega t = 0, 2\pi$ で一周期となる。 $t = 0$ から**周期 (period)** T で1周期となるので、 $T = 2\pi/\omega$ となる。 $\omega = 2\pi\nu$ で**振動数 (frequency)** ν を定義すれば、 $\nu = 1/T$ となる。 ω は**角振動数 (angular frequency)** とよばれる。

$\exp(i\theta)$ の θ に相当する $kx - \omega t$ を**位相 phase** とよぶ。cos の波において一番振幅が正方向に大きいのは位相がゼロ $kx - \omega t = 0$ のところである。その位置は、 $x = (\omega/k)t$ となり、 $+x$ 方向に進行する波となる。また、この時の波の移動速度を**位相速度 phase velocity** といい、 $v = \omega/k$ となる。 $-x$ 方向に進行する波はしたがって、 $Ae^{i(kx + \omega t)}$ となる。(Fig. 5, 6, 7)

2 波動方程式の導入

u を、 x および t で微分する。また、この時 X を以下の様に定義する。 f は $f(X)$ となる。

$$X \equiv x \mp vt, \quad f(x \mp vt) = f(X) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{df}{dX} = \frac{df}{dX} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{df}{dX} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \frac{df}{dX} = \frac{d^2 f}{dX^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{df}{dX} = \mp v \frac{df}{dX} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mp v \frac{\partial}{\partial t} \frac{df}{dX} = \mp v \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} \frac{df}{dX} = v^2 \frac{d^2 f}{dX^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dX^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11)$$

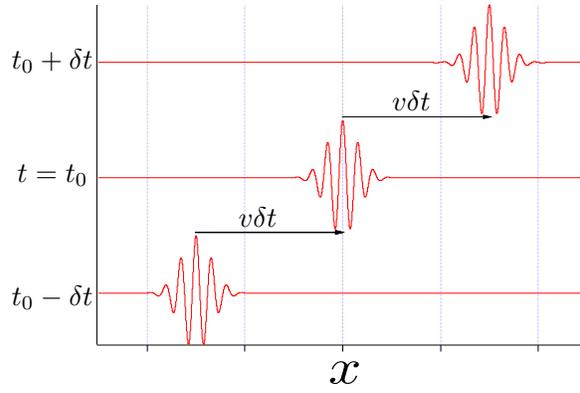


Figure 2: 波束の伝播。波束は $+x$ 方向に速度 v で形を変えずに移動している。

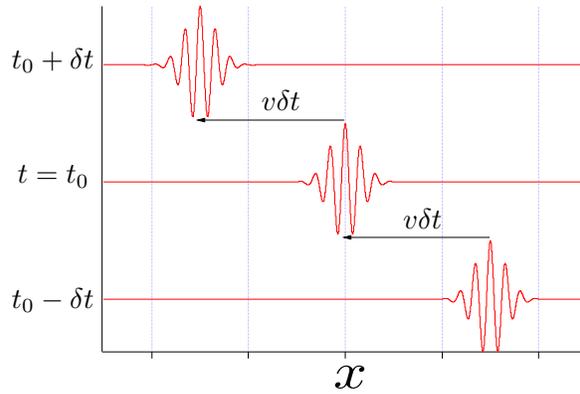


Figure 3: 波束の伝播。波束は $-x$ 方向に速度 v で形を変えずに移動している。

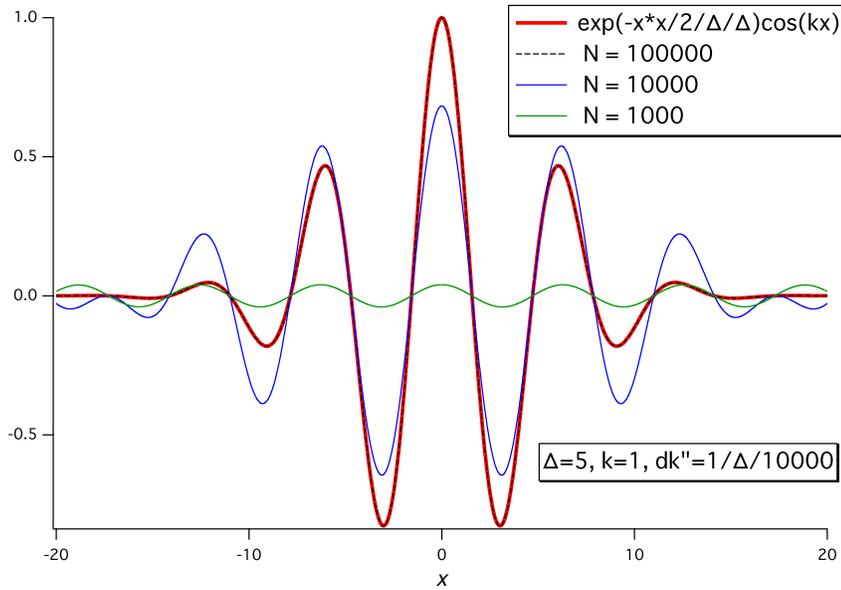


Figure 4: 波束はいろいろな波の重ね合わせである。 $f(x) = A \exp(-x^2/2/\Delta^2) \exp(ikx)$ で表される Gaussian wavepacket (ガウス波束) は、 $f(x) = \frac{A\Delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \exp[-\frac{\Delta^2}{2}(k-k')^2 + ik'x]$ と書ける。すなわち実数部だけ書くと、 $\text{Re}f(x) = A \exp(-x^2/2/\Delta^2) \cos(kx) = \frac{A\Delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \exp[-\frac{\Delta^2}{2}(k-k')^2] \cos(k'x)$ となる。積分ではなくと和の形に書くと、 $\text{Re}f(x) = \frac{A\Delta}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k''} (\delta k'') \exp[-\frac{\Delta^2}{2}k''^2] \cos[(k-k'')x]$, $k'' = k - k' = ndk''$, $(n = -N, -N + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N - 1, N)$ となる。すなわち、ガウス波束は、いろいろな波長の波 $\cos[(k-k'')x]$ を重み $\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{\Delta^2}{2}k''^2]$ をかけて和をとったもので表される。

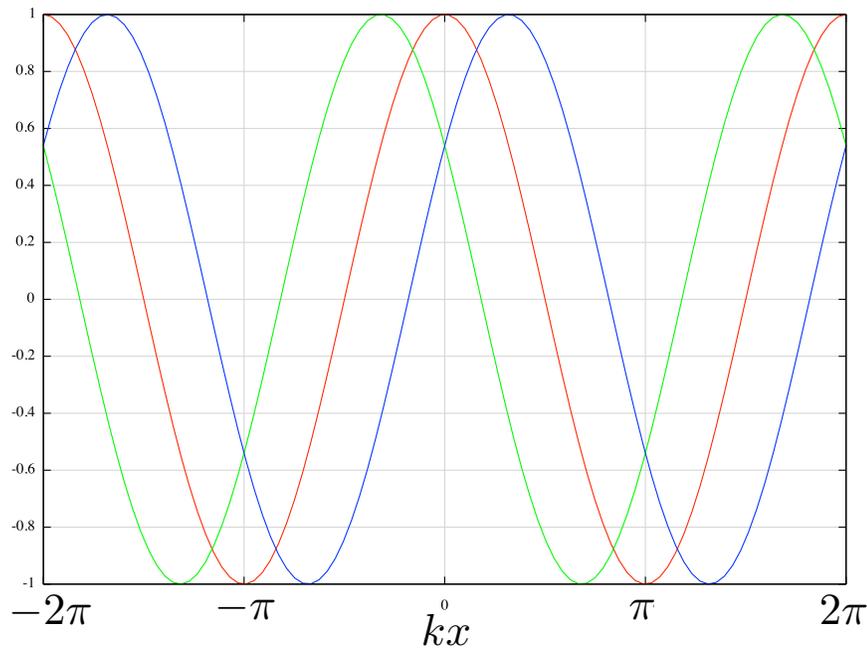


Figure 5: 波の伝播。赤線は $\cos(kx)$ である。 $\delta > 0$ とすると、青線は $\cos(kx - \delta)$, 緑線は $\cos(kx + \delta)$ である。2つの山の間隔から $k\lambda = 2\pi$ がわかる。ある時間後に $+x$ 方向に伝播する場合は $\cos(kx - \delta)$, $-x$ 方向に伝播する場合は、 $\cos(kx + \delta)$ となる。

波 $A \exp[i(kx - \omega t)]$

A:振幅

(\dots) = $kx - \omega t$: 位相

通常は計算の便宜のため $\cos(x) \Rightarrow \exp(ix)$ と複素数の表現をとるが、量子力学の波動関数ではより本質的な意味で複素数の表現を使う。すなわち、存在確率が均一で状態を記述するために $\psi^* \psi = |A|^2 = \text{const}$ とする必要がある。 $\cos^2(x)$ では、存在確率が一定にならない。

Figure 6: 波の位相

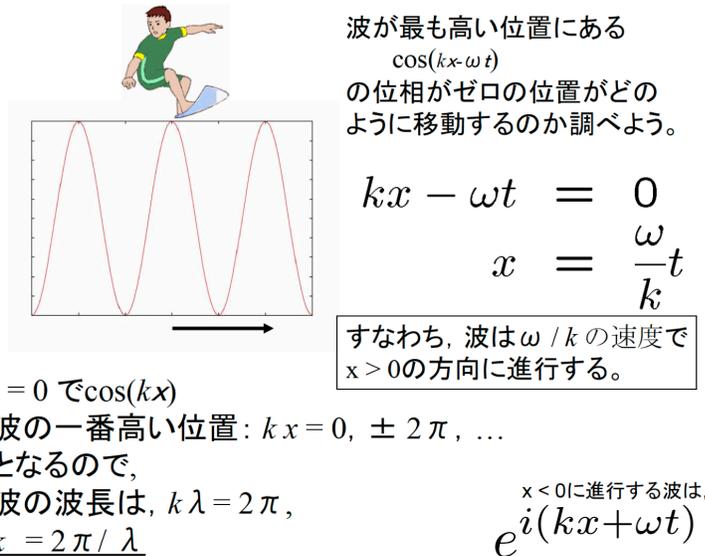
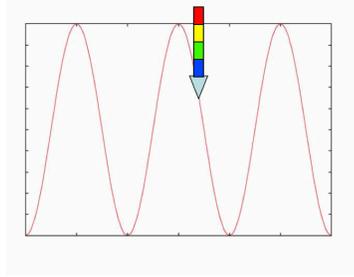


Figure 7: $+x$ 方向への進行波の頂点に乗ってサーフィンする。頂点は、波の位相がゼロである。この条件から位相速度 $v = \omega/k$ が得られる。波の最高到達地点の間隔は、波長 λ である。



ある特定の場所にウキを浮かべて
その振動の時間変化を見よう。
 $x = 0$ の点で

$$\cos(\omega t)$$

波が最大の高さになる時間は,
 $\omega t = 0, \pm 2\pi, \dots$

$$\text{周期 } T = 2\pi/\omega$$

角振動数と振動数は $\omega = 2\pi\nu$

$$T = 2\pi/\omega = 1/\nu$$

波の速度(位相速度)は, $v = \omega/k = 2\pi\nu/(2\pi/\lambda) = \lambda\nu$

光の場合 $c = \omega/k = \lambda\nu$ となる。

Figure 8: ある場所における波の振動, 周期, 振動数, 角振動数

が得られる。 $f(x + vt)$ あるいは $f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ についても同様な式が得られる。(宿題： $f(x + vt)$ あるいは $f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ についても同様な式が得られることを証明せよ。)

解答例：

$$u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) = f_1(X) + f_2(Y) \quad (12)$$

$$X = x - vt, \quad Y = x + vt \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial Y} = \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right) u \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial Y} = -v \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right) u \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{d^2 f_1(X)}{dX^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{d^2 f_2(Y)}{dY^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{df_2(Y)}{dY} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (20)$$

式(11)は、**波動方程式 (wave equation)** とよばれ、時間および空間に関して2階の偏微分方程式となっている。また、それぞれの解の足し算もまた波動方程式の解になっていることは、線形性あるいは「重ね合わせの原理」が成り立つことを意味する。

逆に、式(11)の方程式をみたす関数は、 $f(x - vt)$, $f(x + vt)$, $f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ となることも示すことができる。以下のように定義しよう。

$$X \equiv x - vt, \quad Y \equiv x + vt \quad (21)$$

$\partial^2 u / \partial t^2$ と $\partial^2 u / \partial x^2$ を u の X, Y についての微分で表してみる。

$$x = \frac{X+Y}{2}, \quad t = \frac{-X+Y}{2v} \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial Y} = -v \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} &= -v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial Y} = -v \left(\frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\partial u}{\partial X} + v \left(\frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\partial u}{\partial Y} \\ &= v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial Y} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (26)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (27)$$

波動方程式が成立するには,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (28)$$

となる。

$u = f_1(X) + f_2(Y)$ ならこの式は成立する。従って, $u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$
この式 Y について積分すると,

$$\frac{\partial u}{\partial X} = f_1'(X) \quad (29)$$

$f_1'(X)$ は、 Y に依存しない任意の X の関数の微分である。この式をさらに X で積分すると、

$$u = \int dX f_1'(X) + f_2(Y) = f_1(X) + f_2(Y) \quad (30)$$

ここで、 $f_2(Y)$ は、 X に依存しない Y の任意の関数である。以上の関係により、波動方程式を満たす関数 $u(x, t)$ は、 $u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ の関数によりあらわされることが示された。

以上では、波の一般的な性質から波動方程式を導いてきたが、実際には u がもつ物理的な性質から導かれるものである。ロープの張力やばねで連結された質点の例がよく使われる。

3 $e^{\pm i(kx - \omega t)}$ は波動方程式の解となるのか？

$e^{\pm i(kx - \omega t)}$ を t で二階微分すると $-\omega^2 e^{\pm i(kx - \omega t)}$ に、 $e^{\pm i(kx - \omega t)}$ を x で二階微分すると $-k^2 e^{\pm i(kx - \omega t)}$ になる。波動方程式は、 $-\omega^2 = -v^2 k^2$ となり、 $v = \omega/k$ が得られる。これは、前節での考察と一致する。

4 波動方程式の変数分離解

波動方程式を、 x と t が変数分離可能であるとする。

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (31)$$

この解を波動方程式に代入すると

$$X(x) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v^2 T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (32)$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2 T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (33)$$

左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数であるのでそれぞれはある定数 K に等しい。すなわち、以下のようになる。

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = KX \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = Kv^2 T \quad (35)$$

今、ある長さ L の弦を考えその波動方程式を解く。 $x = 0, L$ で

$$u(x = 0, t) = 0, \quad u(x = L, t) = 0 \quad (36)$$

$T(t)$ は常にゼロということはないので、

$$X(x = 0) = 0, \quad X(x = L) = 0 \quad (37)$$

となる。これは弦の境界の条件なので、**境界条件**という。

4.1 $K = 0$ の場合

$X' = A, X = Ax + B$ となる。境界条件を満たすのは、 $A = B = 0$ のみであり、自明な (trivial) 解となる。

4.2 $K > 0$ の場合

$K = \beta^2$ であるとしよう。

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \beta^2 X \quad (38)$$

この方程式の一般解は、

$$X(x) = c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x} \quad (39)$$

である。この場合においても、境界条件を満たすのは $c_1 = c_2 = 0$ の自明な解となる。なぜなら、

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad (40)$$

$$X(L) = c_1 e^{\beta L} + c_2 e^{-\beta L} = 0 \quad (41)$$

$$c_1(e^{\beta L} - e^{-\beta L}) \neq 0 \quad (42)$$

となるからである。

4.3 $K < 0$ の場合

$K = -\beta^2$ であるとしよう。

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\beta^2 X \quad (43)$$

この方程式の一般解は,

$$X(x) = c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x} \quad (44)$$

である。この場合においても、境界条件は,

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad (45)$$

$$X(L) = c_1 e^{i\beta L} + c_2 e^{-i\beta L} = 0 \quad (46)$$

$$c_1(e^{i\beta L} - e^{-i\beta L}) = c_1[2i \sin(\beta L)] = 0 \quad (47)$$

$$\beta = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (48)$$

$n = 0$ の場合は、自明な解となるので

$$X(x) = c_1[e^{n\pi i x/L} - e^{-n\pi i x/L}], \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (49)$$

$$= 2ic_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (51)$$

最後の式で、 X は実数であることを用いた¹。

n はいわゆる **モード** を表し、 X_n のいくつかを図示する。モードの重ねあわせもまた波動方程式の解になる。

T については、境界条件がない。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -(\beta v)^2 T = -\frac{(n\pi v)^2}{L^2} T = -\omega_n^2 T \quad (52)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad (53)$$

この方程式の一般解は,

$$T_n(t) = D_n e^{i\omega_n t} + G_n e^{-i\omega_n t} \quad (54)$$

$t = 0$ の条件

$$T_n(t=0) = D_n + G_n = B_n \cos \delta = \frac{B_n}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \quad (55)$$

$$\text{If we set} \quad (56)$$

$$D_n = \frac{B_n}{2} e^{i\delta}, \quad G_n = \frac{B_n}{2} e^{-i\delta} \quad (57)$$

$$\text{we can get the same phase,} \quad (58)$$

$$T_n(t) = \frac{B_n}{2}[e^{i(\omega_n t + \delta)} + e^{-i(\omega_n t + \delta)}] = B_n \cos(\omega_n t + \delta) \quad (59)$$

¹すなわち、 c_1 は純虚数である

従って、 $u_n(x, t)$ は、

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)B_n \cos(\omega_n t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (60)$$

各 $u_n(x, t)$ が波動方程式の解であるので、その重ね合わせ (superposition) もまた解となる。従って波動方程式の解 $u(x, t)$ は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t) \quad (61)$$

となる。

5 3次元の波

5.1 平面波 (plane wave)

波の進む方向に向きをもち大きさ $2\pi/\lambda$ のベクトルを**波数ベクトル** \mathbf{k} としよう。1次元の波 $\cos(kx - \omega t)$ で波の最大振幅は位相がゼロである線が $\pm x$ 方向に進行するとみなせたように、3次元では位相がゼロである面が $\pm \mathbf{k}$ 方向に進行すると見なせる。この波を**平面波**という。波数ベクトルに垂直な面内のベクトル \mathbf{r} を表す方程式は、

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (62)$$

$$k_x x + k_y y + k_z z = 0 \quad (63)$$

である。したがって、3次元の平面波は

$$u(\mathbf{r}, t) = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)] \quad (64)$$

とあらわされる。

位相 X と波束 $u = f(X)$ より波動方程式を導こう。

$$X = k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t \quad (65)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial X} = \mp \omega \frac{\partial f}{\partial X} \quad (66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = \mp \omega \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial X} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (67)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial X} = k_x \frac{\partial f}{\partial X} \quad (68)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = k_x \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial X} = k_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (69)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k_z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (70)$$

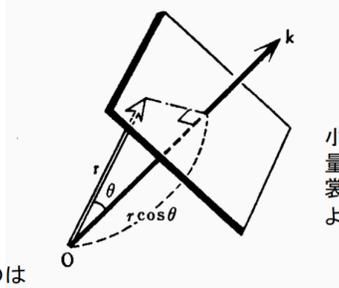
$$\nabla^2 u = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}, \quad \nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2) + (\partial^2 / \partial z^2) \quad (71)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (72)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2} \nabla^2 u \quad (73)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \nabla^2 = v^2 \nabla^2 u \quad (74)$$

平面波: Plane wave $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$



小出昭一郎
量子論
裳華房
より

波の位相が一定であるのは

$$k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{const}$$

$$kr \cos \theta = \text{const}$$

平面の方程式
 $ax+by+cz+d=0$

位相一定の t は k に垂直 位相=0, $t=0$, $r \cdot k = 0 \Rightarrow$ 波の進行方向は k

Figure 9: 平面波

この式が3次元での波動方程式となる。ここで、 $v = \omega/k$ である。

5.2 球面波

3次元の波動方程式は、平面波だけではなく、点を波源としてあらゆる方向に伝播する球面波（例：X線の原子により散乱）も解としてもつ。球座標系で、Laplacian は

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 u = \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (75)$$

u に θ と ϕ の依存性がないとし、 $ru(r, t) = U(r, t)$ とおけば、

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 u = \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (76)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) = v^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad (77)$$

となり、1次元の波動方程式と同じ形になる。1次元の時と同じ考え方で、 $U(r, t) = f_1(r - vt) + f_2(r + vt)$ とすることができるので、

$$u(r, t) = \frac{U(r, t)}{r} = \frac{f_1(r - vt) + f_2(r + vt)}{r} \quad (78)$$

と書くことができる。図に、球面波 (spherical wave) の典型例を示す。

6 Appendix

$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta \quad (79)$$

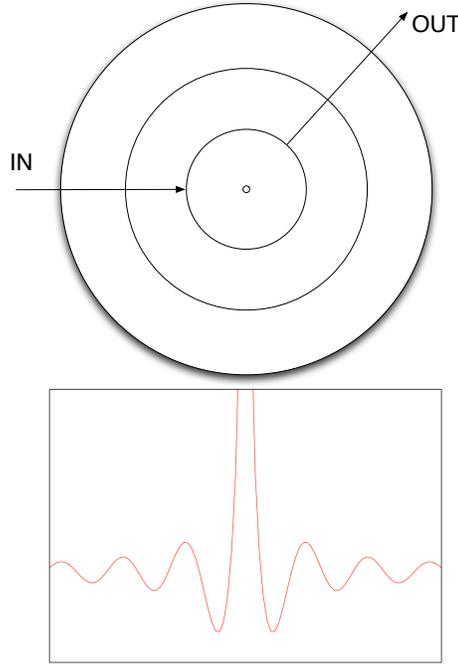


Figure 10: 球面波。波は IN 方向に球の中心に向かって進行し $f_2(r + vt)$, OUT 方向に向かって球の中心から外側に進行する $f_1(r - vt)$ 。

はそれぞれを Taylor 展開すればよい。

If the function $f(x)$ can be approximated by the polynomials around $x = a$

$$f(x) \simeq a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + a_4(x - a)^4 + \dots + a_n(x - a)^n \quad (80)$$

If $|x - a| \ll 1$, the above equations can be converged. We can get the 1st to n -th derivative such as

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + 4a_4(x - a)^3 + \dots + na_n(x - a)^{n-1} \quad (81)$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3(x - a) + 4 \times 3a_4(x - a)^2 + \dots + n(n - 1)a_n(x - a)^{n-2} \quad (82)$$

$$f'''(x) = 3 \times 2a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4(x - a) + \dots + n(n - 1)(n - 1)a_n(x - a)^{n-3} \quad (83)$$

$$f''''(x) = 4 \times 3 \times 2a_4 + \dots + n(n - 1)(n - 2)(n - 3)a_n(x - a)^{n-4} \quad (84)$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n \quad (85)$$

Then we have

$$a_1 = f'(a), \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(a), \quad a_3 = \frac{1}{3!}f'''(a), \quad a_4 = \frac{1}{4!}f''''(a), \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \quad (86)$$

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x - a)^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n \quad (87)$$

This is the Taylor expansion around $x = a$.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \quad (88)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 \dots \quad (89)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \dots, \quad \sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots, \quad \text{then we have } e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (90)$$

$$(91)$$

上の e^{ix} の展開では、 $x \ll 1$ のところで展開した。より一般に $x = x_0$ の回りの展開ではどうなるのであろうか？ $x_0 = x_1 + dx, dx \ll 1$ とする。

$$e^{ix_0} = e^{i(x_1+dx)} = e^{ix_1} e^{idx} = e^{ix_1} [1 + idx - \frac{1}{2!}(dx)^2 - \dots] = e^{ix_1} [\cos(dx) + i \sin(dx)]$$

となる。同様に、 $x_1 = x_2 + dx, x_2 = x_3 + dx, \dots, x_{n-1} = x_n + dx, 0 = x_n = x_0 - ndx$

$$e^{ix_1} = e^{ix_2} [\cos(dx) + i \sin(dx)], \quad e^{ix_0} = e^{ix_2} [\cos(dx) + i \sin(dx)]^2$$

...

$$e^{ix_{n-1}} = e^{ix_n} [\cos(dx) + i \sin(dx)], \quad e^{ix_0} = e^{ix_n} [\cos(dx) + i \sin(dx)]^n = [\cos(dx) + i \sin(dx)]^n$$

$$[\cos(dx) + i \sin(dx)]^2 = \cos^2(dx) - \sin^2(dx) + 2i \cos(dx) \sin(dx) = \cos(2dx) + i \sin(2dx)$$

$$[\cos(dx) + i \sin(dx)]^3 = [\cos(2dx) + i \sin(2dx)][\cos(dx) + i \sin(dx)]$$

$$= \cos(2dx) \cos(dx) - \sin(2dx) \sin(dx) + i[\sin(2dx) \cos(dx) + \sin(dx) \cos(2dx)]$$

$$= \cos(3dx) + i \sin(3dx)$$

...

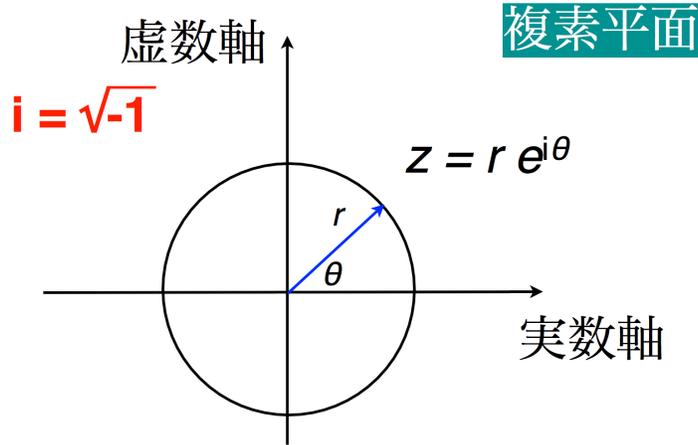
$$[\cos(dx) + i \sin(dx)]^n = \cos(ndx) + i \sin(ndx) = \cos(x_0) + i \sin(x_0)$$

$$e^{ix_0} = \cos(x_0) + i \sin(x_0)$$

となり、一般の x に対して、 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が示された。

References

- [1] 有山 正孝, 「振動・波動」 (基礎物理学選書 (8)) 1986, 裳華房



→ : 長さ r で実軸となす角 θ

$$z = r e^{i\theta} = r (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z),$$

$$\text{Re}(z) = r \cos\theta, \quad \text{Im}(z) = r \sin\theta$$

Figure 11: 複素平面における複素数の表示。横軸が実数軸で縦軸が虚数軸である。複素数 z を $z = r e^{i\theta}$ (ここで, r は原点からの距離, θ は実軸からの角度) で表すと, 実数成分は $\text{Re}z = r \cos\theta$, 虚数成分は $\text{Im}z = r \sin\theta$ となる。

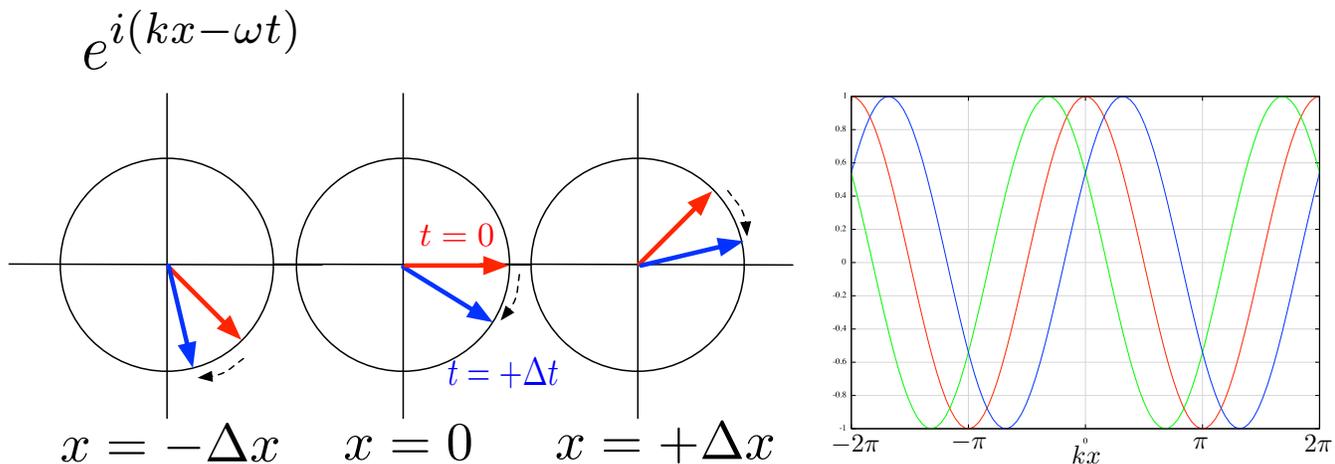


Figure 12: $+x$ 方向への進行波 $e^{i(kx - \omega t)}$. $x = 0$ (中央の図) および $t = 0$ で, $e^0 = 1$ すなわち赤の矢印の位置にあったものが, $t = +\Delta t$ 後には, $e^{-i\omega\Delta t} = \cos(\omega\Delta t) - i \sin(\omega\Delta t)$ すなわち青の矢印の位置にある。この波は, 複素平面上を半径1で時計回りに角速度 ω で回転しているものと考えることができる。矢印の実軸上への射影を右図の赤線と青線で示した。青線は, 赤線から見て $+x$ 方向への進行波となっている。

$$e^{i(kx+\omega t)}$$

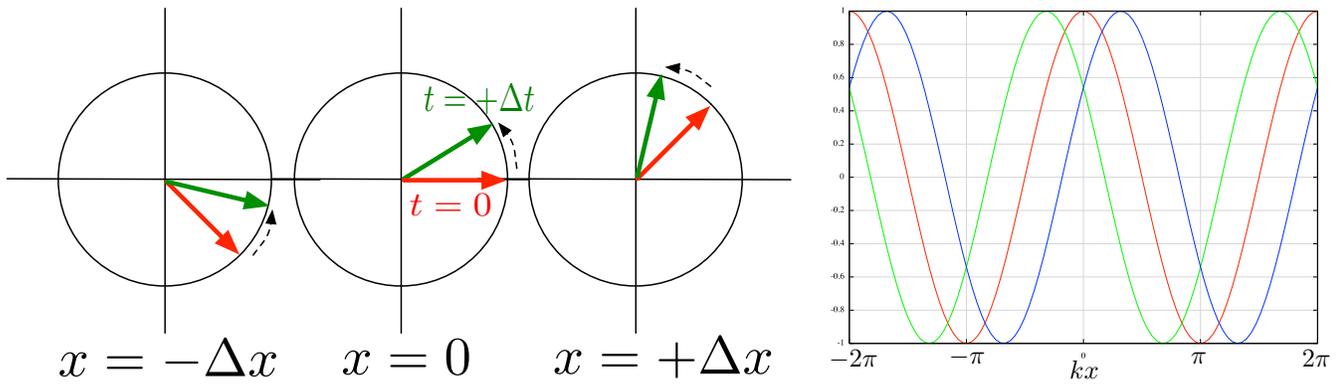


Figure 13: $-x$ 方向への進行波 $e^{i(kx+\omega t)}$ $x = 0$ (中央の図) および $t = 0$ で, $e^0 = 1$ すなわち赤の矢印の位置にあったものが, $t = +\Delta t$ 後には, $e^{i\omega\Delta t} = \cos(\omega\Delta t) + i\sin(\omega\Delta t)$ すなわち緑の矢印の位置にある。この波は, 複素平面上を半径 1 で反時計回りに角速度 ω で回転しているものと考えることができる。矢印の実軸上への射影を右図の赤線と緑線で示した。緑線は, 赤線から見て $-x$ 方向への進行波となっている。