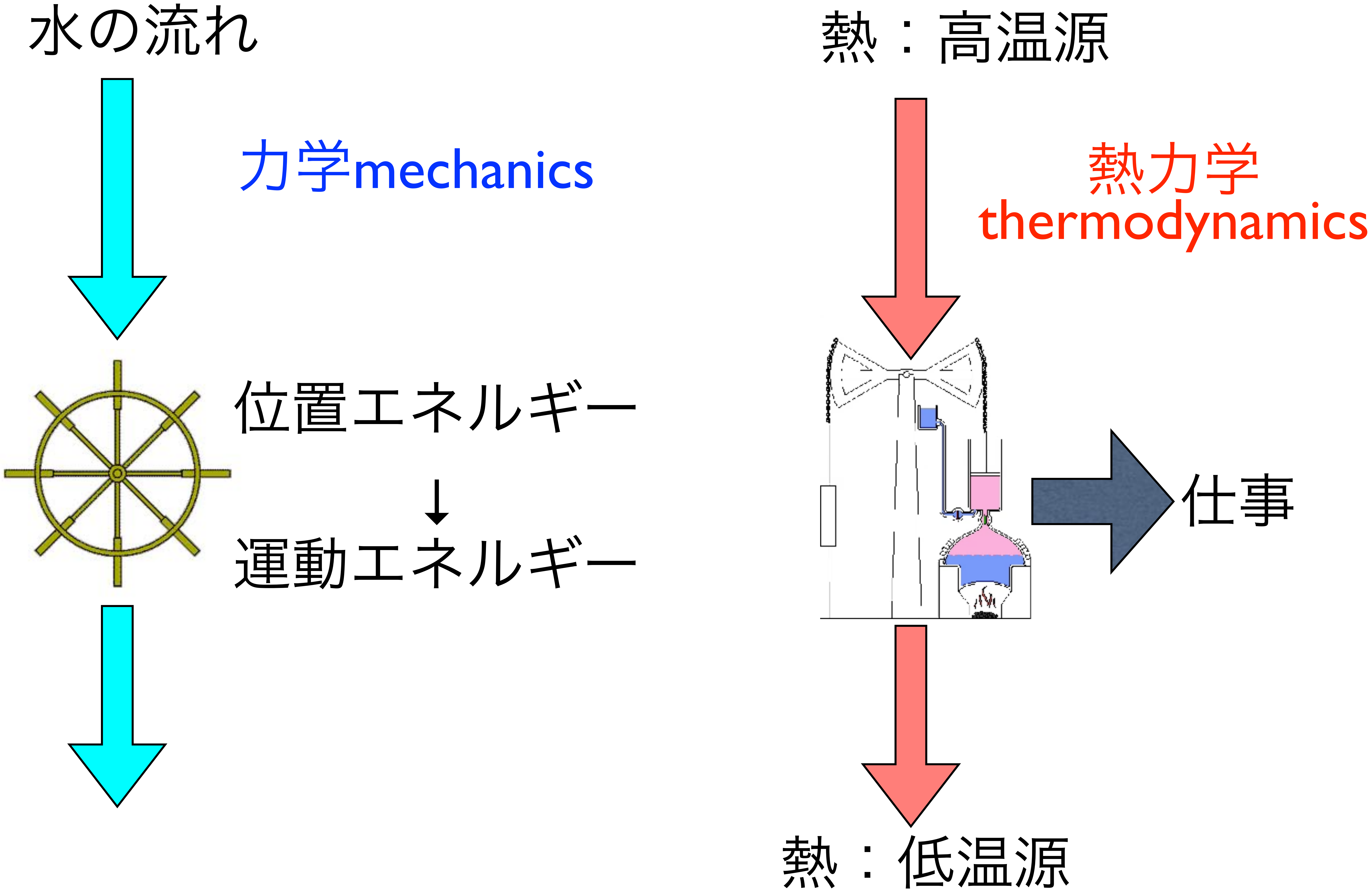

水の流れ
力学mechanics
位置エネルギー
↓
運動エネルギー
熱：高温源
熱力学
thermodynamics
仕事
熱：低温源

エネルギー保存　→　？？？

力学

- 高校の物理基礎の復習

（履修してなくても大丈夫です）

- 特に微分・積分と力学の関係を述べます。
- 両者を高校では無関係として学んできたと思いますが，そもそも微分積分は力学の解析のなかから生まれてきました。いわゆるNewton力学ですね。
- 理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ を導きます。

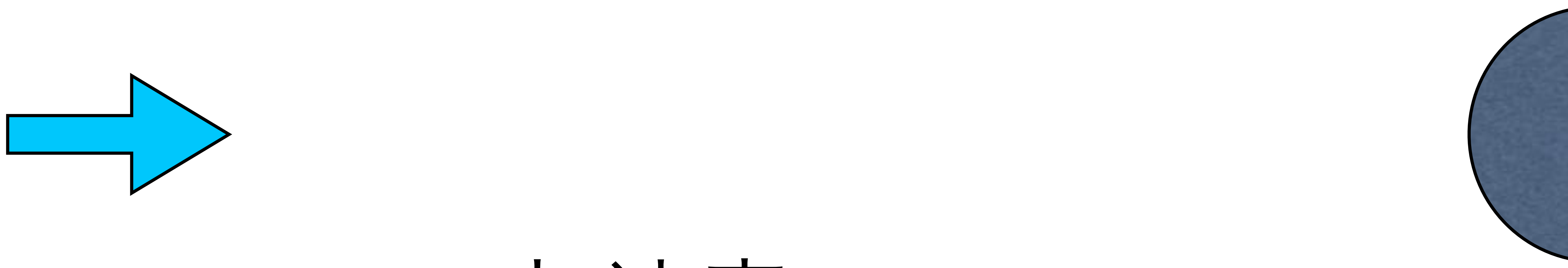
運動の第一法則

「すべての物体は、外部から力を加えられない限り、静止している物体は静止状態を続け、運動している物体は等速直線運動を続ける」

運動の第二法則

物体の運動状態の時間変化を、物体に作用する力と関係付ける法則

質量m　　力F



加速度a

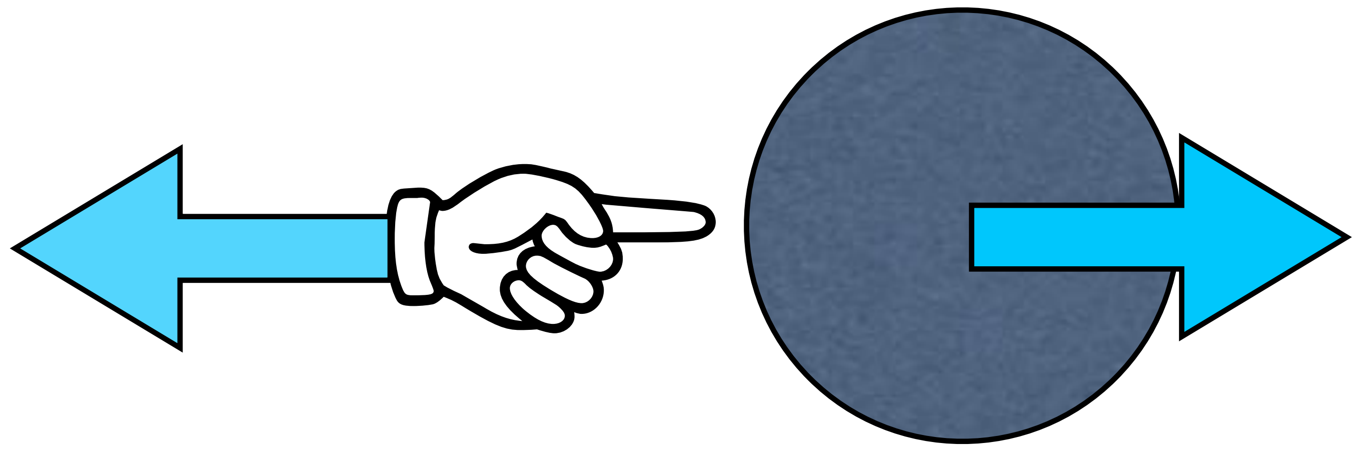
$$\boxed{F = ma}$$

Newtonの運動方程式

運動の第三法則

一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しい

・作用・反作用の法則



$$F = ma$$ に関して(*)

この式の等号を，通常の式の等号と考え，右辺と左辺が等しいと単純に理解してはいけない。質量mをもつ物体に力Fが加えられたならば，その結果として加速度aが生じるという因果関係（原因と結果）をあらわしているのである。...こういうことをわざわざ言うのも，両辺を単純に等しいとみて，力Fのほかにも今ひとつの力maがあるかのような誤解をしている学生をときどき見かけるからである。

$$F \mapsto ma$$

＊新・物理入門（増補改訂版）　山本義隆　駿台文庫

$F = ma$ に関して(*)

運動方程式や作用・反作用の法則は何からも導かれない式であり，その意味で力学の出発点としての原理の位置をしめる。それでは原理の正しさは何によって保証されているのかといえば，それは，そこから導き出される諸法則が経験的・実験的事実をよく説明するということによってである。

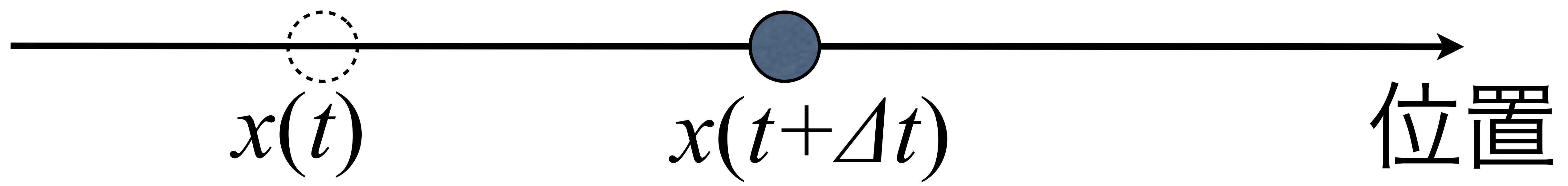
＊新・物理入門（増補改訂版）　山本義隆　駿台文庫

単位（SI単位系以外使わないこと）

- m: 質量 [kg]
- l: 距離[m]
- t: 時間[s]
- v :速度[m s^{-1}]　微分量として定義します
- a: 加速度[m s^{-2}]　微分量として定義します
- F: 力[N]=[kg m s^{-2}]　Newtonの法則

物体の運動（力学）と微分積分

$x(t)$: 物体が時間t[s]の時にいる位置 [m]



移動距離 / 時間 = $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{(t+\Delta t)-t}$

割る

速度：$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \dfrac{dx(t)}{dt}$

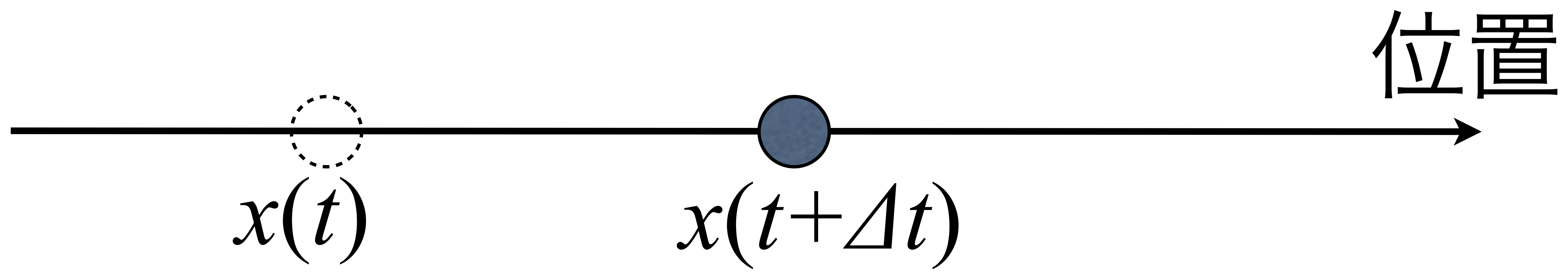
[m s^{-1}]

Δt: 微少時間

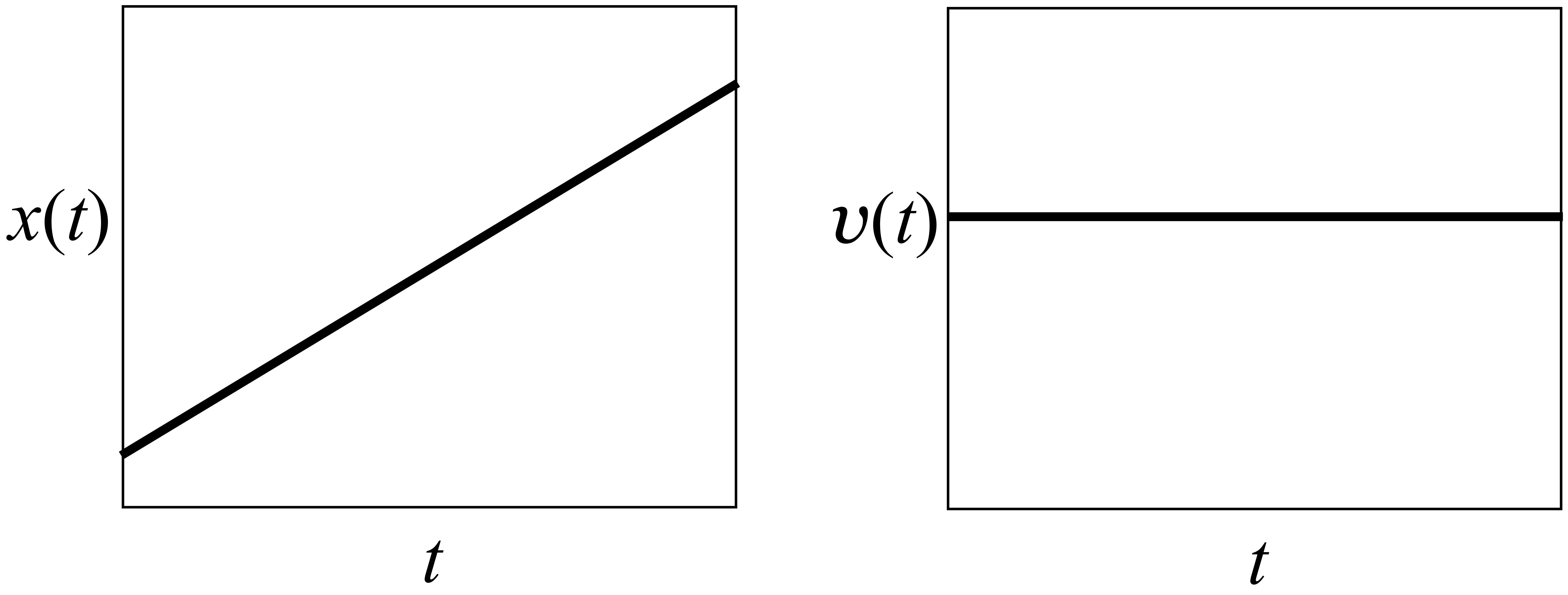
例えば，0.01 s

dt: 無限小時間

両者を混同しても事実上問題ない



等速度運動なら速度は定数



微分・積分と物理化学

切っても切れない仲

今さら公式憶える？

いいえ，定義から導きましょう！！

...

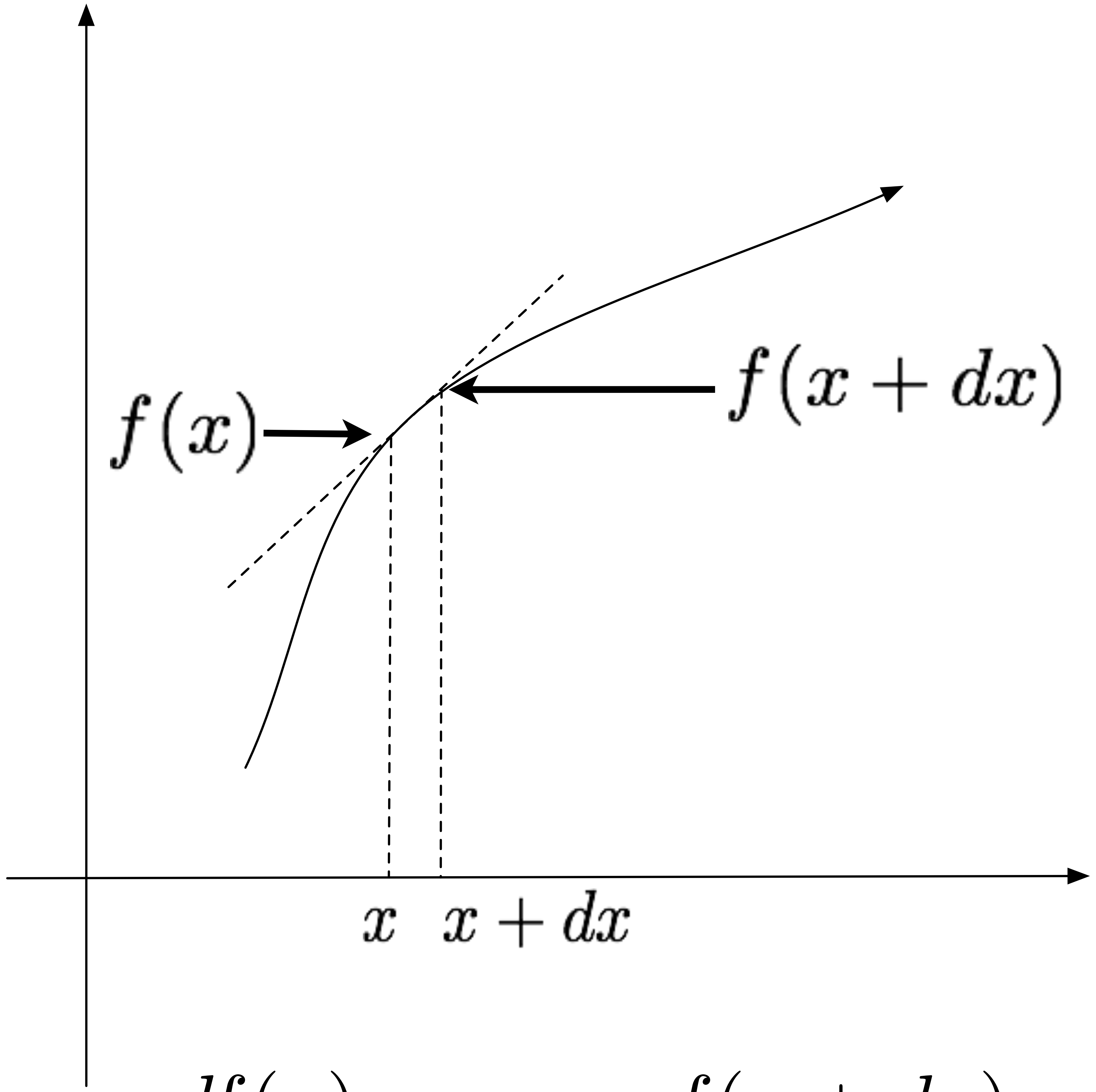
物理化学で最も脅威を憶える点は，習ったことがないか，たとえ習ったとしても忘れてしまっている数学を遠慮なく使うことであろう。

...

物理化学の講義を何年もした経験から，物理化学のトピックを提示する前にそこで使う数学を復習するのが役に立つことが解った。

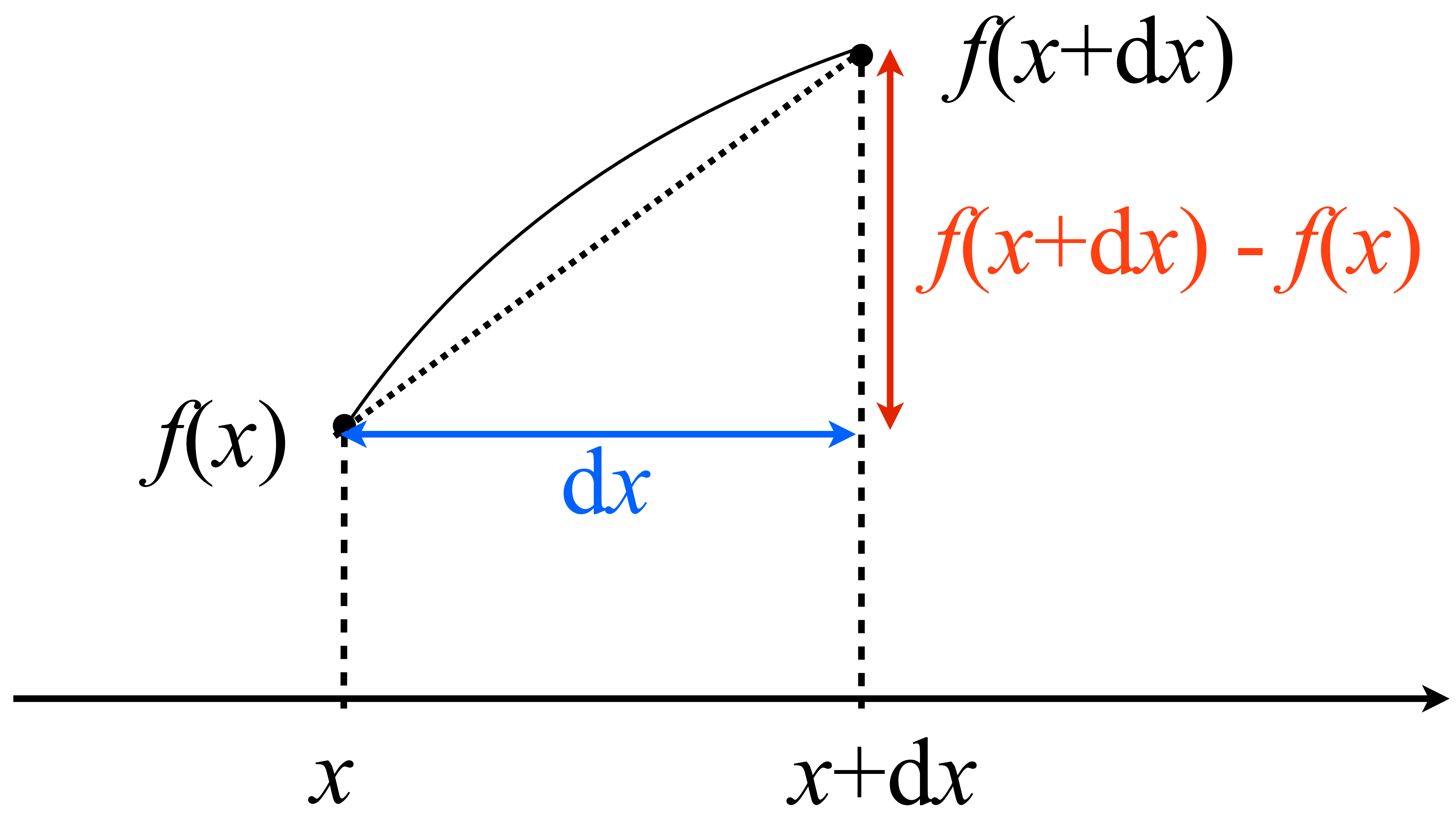
マッカリー・サイモン　物理化学　序

微分



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx)-f(x)}{x+dx-x} \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}
\end{aligned}
$$

例：$f(x) = A,\ f(x) = ax, f(x) = ax^2$



$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{x + dx - x}$$

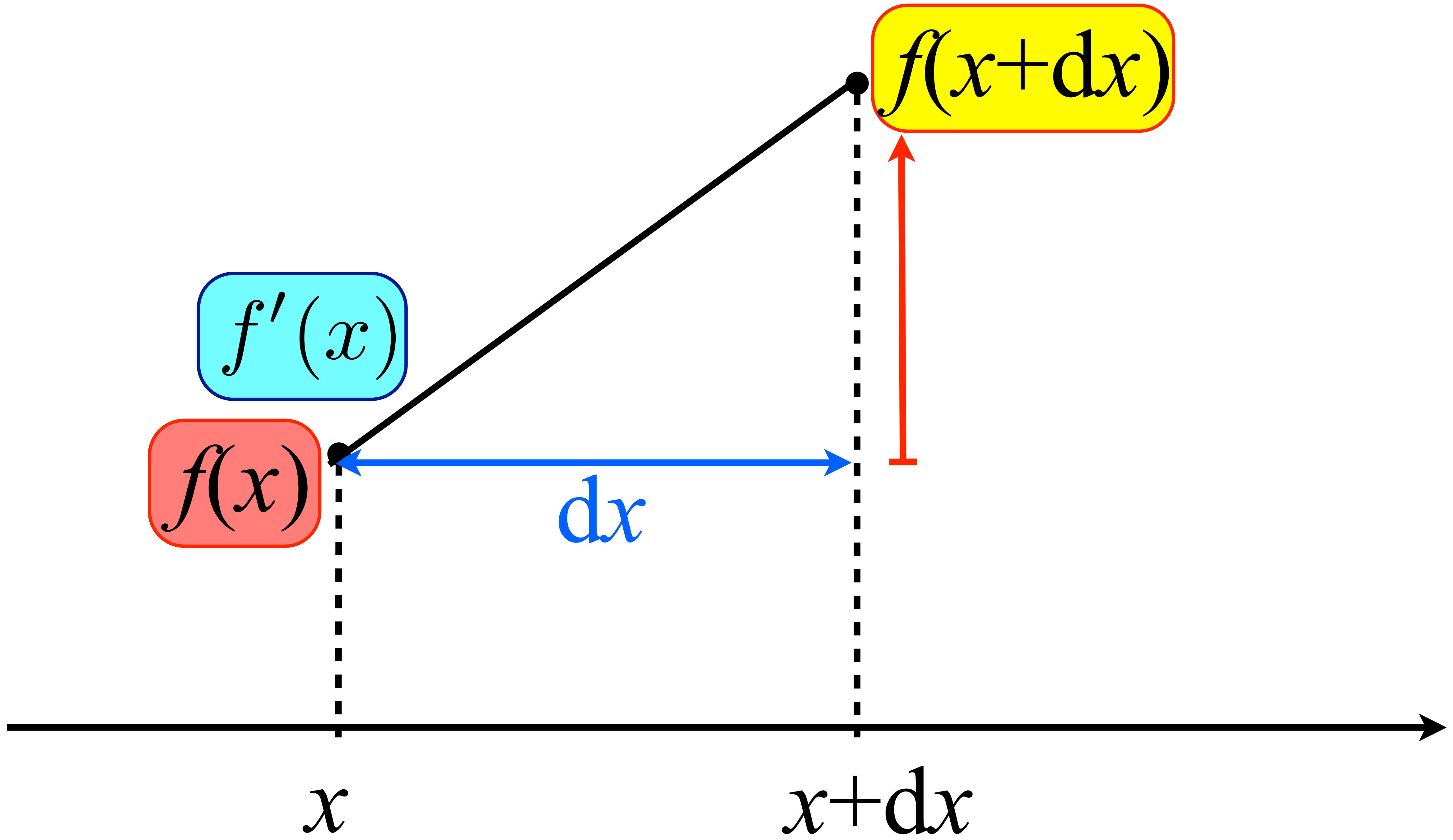
$$= \lim_{dx \to 0} \frac{\boxed{f(x+dx) - f(x)}}{\boxed{dx}}$$

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

えいやっとをlimはずす

$$\boxed{f(x+dx) \simeq f(x) + f'(x)dx}$$

この関係は今後よく使います　　傾き×距離



練習問題：微分の定義から d*f*(*x*)/d*x* を求めなさい

$$f(x) = x$$

$$f(x + dx) - f(x) = (x + dx) - x = dx$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = 1$$

練習問題：微分の定義からd*f*(*x*)/d*x*を求めなさい

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f(x+dx) - f(x) &= (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 \\
\frac{df(x)}{dx} &= f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\
&= \lim_{dx \to 0} \frac{2xdx + (dx)^2}{dx} = \lim_{dx \to 0} (2x + dx) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

練習問題：微分の定義からd*f*(*x*)/d*x*を求めなさい

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f(x+dx) - f(x) &= (x+dx)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 \\ \frac{df(x)}{dx} &= f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

dx, $(dx)^2$ の項はゼロになる

練習問題：微分の定義から$\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$を求めなさい

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^n \\
f(x+dx) - f(x) &= (x+dx)^n - x^n = {}_nC_1 x^{n-1}dx + {}_nC_2 x^{n-2}(dx)^2 + ... \\
&= nx^{n-1}dx + ... \\
\frac{df(x)}{dx} &= f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
(x+dx)^n = (x+dx)(x+dx)(x+dx)....(x+dx)
$$

n項のかけ算からdxを０項だけ選ぶ方法:　1通り

n項のかけ算からdxを１つだけを選ぶ方法:　n通り

n項のかけ算からdxを２つだけ選ぶ方法: ${}_nC_2$通り

練習問題：微分の定義からd*f*(*x*)/d*x*を求めなさい

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \left[\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} \right] / dx = \frac{x - (x+dx)}{(x+dx)x} / dx$$

$$= \lim_{dx \to 0} \frac{-1}{(x+dx)x} = -\frac{1}{x^2}$$

練習問題：微分の定義からd*f*(*x*)/d*x*を求めなさい

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2} = x^{-2} \\
f'(x) &= \lim_{dx\to 0}\left[\frac{1}{(x+dx)^2} - \frac{1}{x^2}\right]/dx = \frac{x^2-(x+dx)^2}{(x+dx)^2x^2}/dx \\
&= \lim_{dx\to 0}\frac{-2x-dx}{(x+dx)^2x^2} = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}
\end{aligned}
$$

練習問題：微分の定義からd*f*(*x*)/d*x*を求めなさい

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$f(x+dx) - f(x) = \frac{1}{(x+dx)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n - (x+dx)^n}{(x+dx)^n x^n}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}dx + ...}{(x+dx)^n x^n}$$

$$f'(x) = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

練習問題：微分の定義からdf(x)/dxを求めなさい

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{n/m} \\
[f(x)]^m &= x^n, \quad \frac{d[f(x)]^m}{dx} = nx^{n-1} \\
\frac{d[f(x)]^m}{dx} &= \lim_{dx \to 0} \frac{[f(x+dx)]^m - [f(x)]^m}{dx} \\
&\simeq \lim_{dx \to 0} \frac{[f(x) + f'(x)dx]^m - [f(x)]^m}{dx} \\
&= \lim_{dx \to 0} \frac{m[f(x)]^{m-1} f'(x)dx + \ldots}{dx} = m[f(x)]^{m-1} f'(x) \\
m[f(x)]^{m-1} f'(x) &= nx^{n-1} \\
f'(x) &= \frac{n}{m} \frac{x^{n-1}}{x^{(m-1)(n/m)}} = \frac{n}{m} \frac{x^{n-1}}{x^{n-(n/m)}} = \frac{n}{m} x^{n-1-n+(n/m)} \\
f'(x) &= \frac{n}{m} x^{(n/m)-1}
\end{aligned}
$$

練習問題：次の$f(x)$の$\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$を求めなさい

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad f(x) = x^{1/2},\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^3}, \qquad f(x) = x^{3/2},\ f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \qquad f(x) = x^{2/3},\ f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

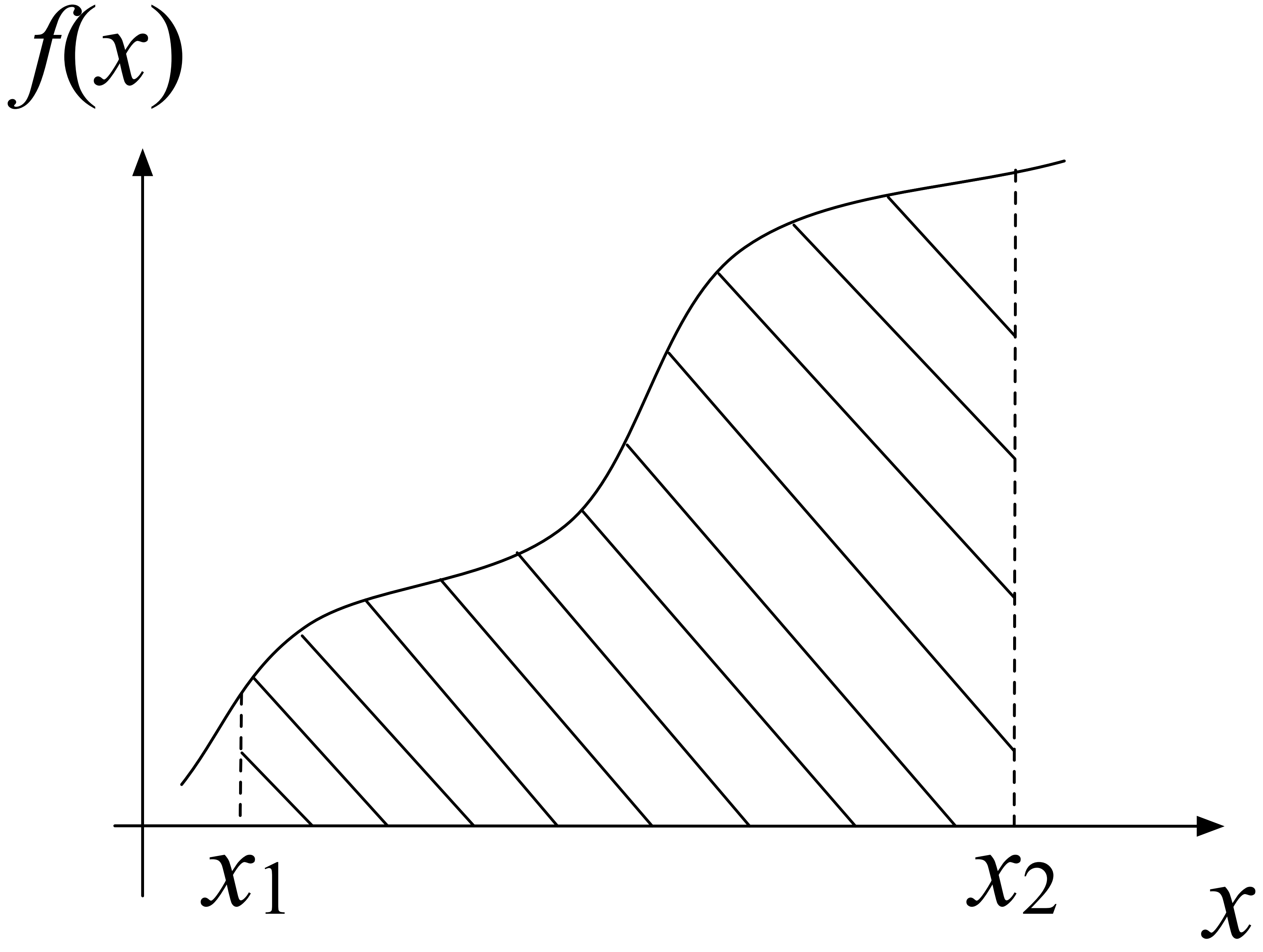
$$f(x) = x^{-2}, \quad x^{-1}, \quad x^0, \quad x, \quad x^2, \ldots$$

$$f'(x) = -2x^{-3}, -x^{-2}, 0, \quad x^0, \quad 2x, \ldots$$

あれれ，微分して1/xになるのはどこへ？？

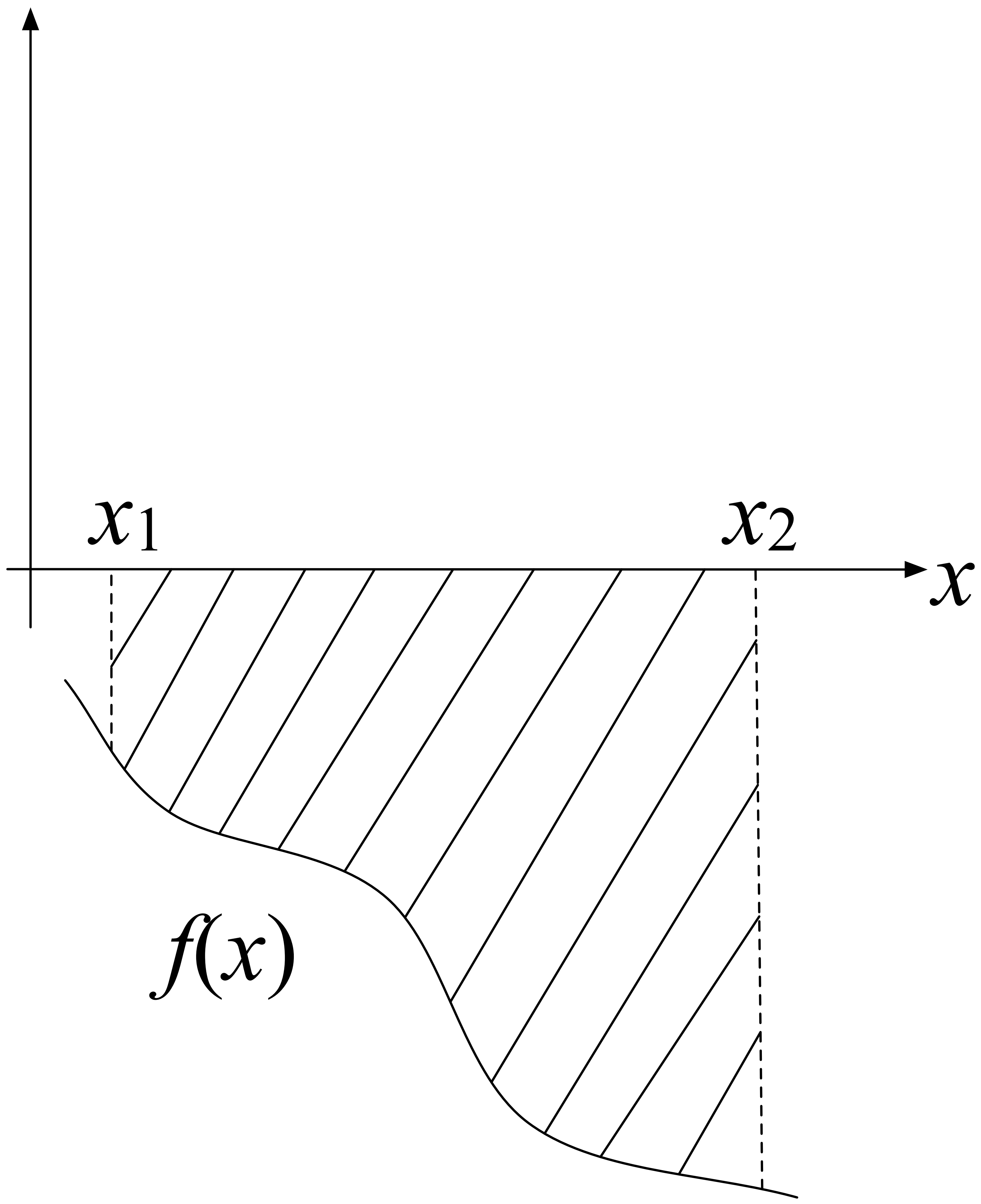
積分

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



積分

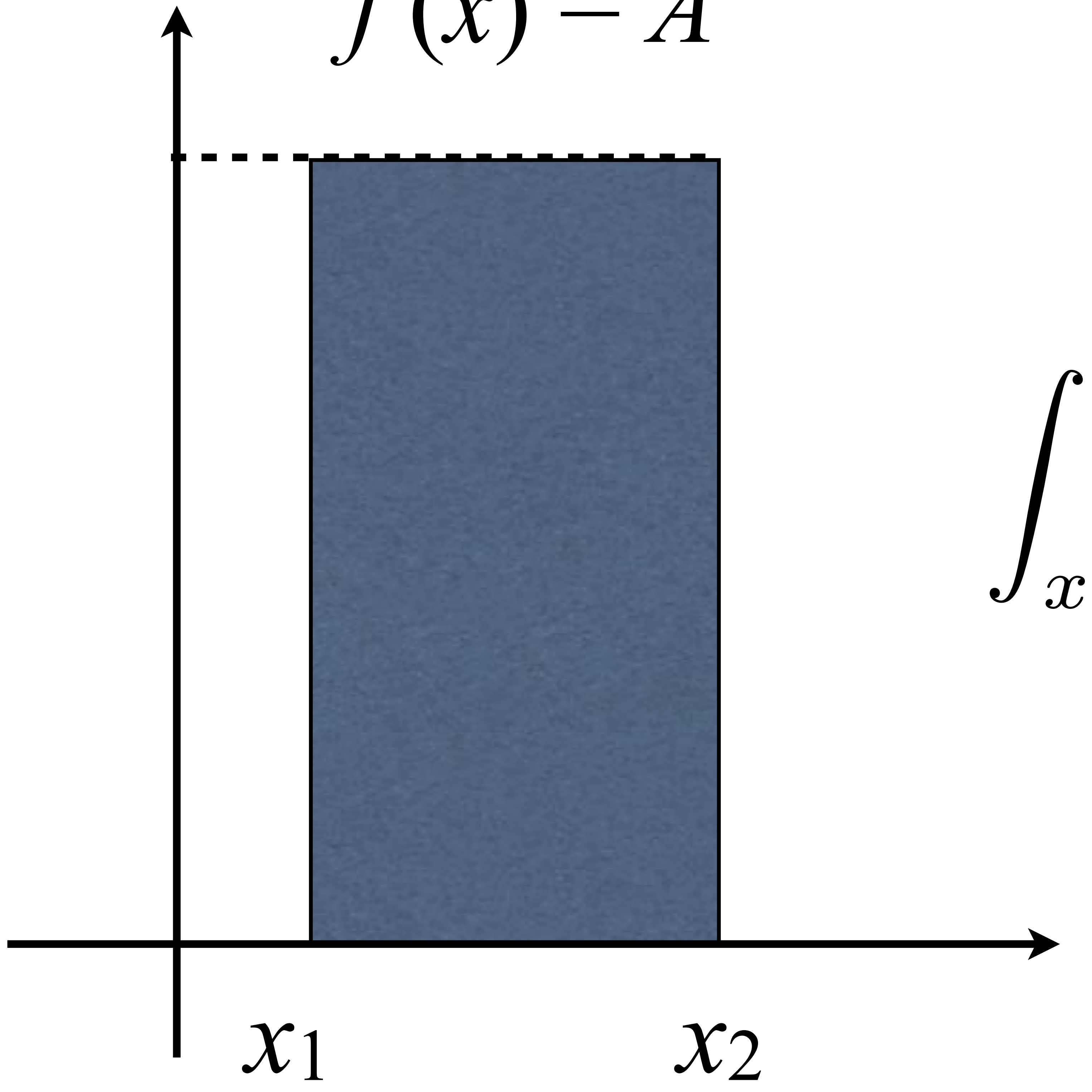
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



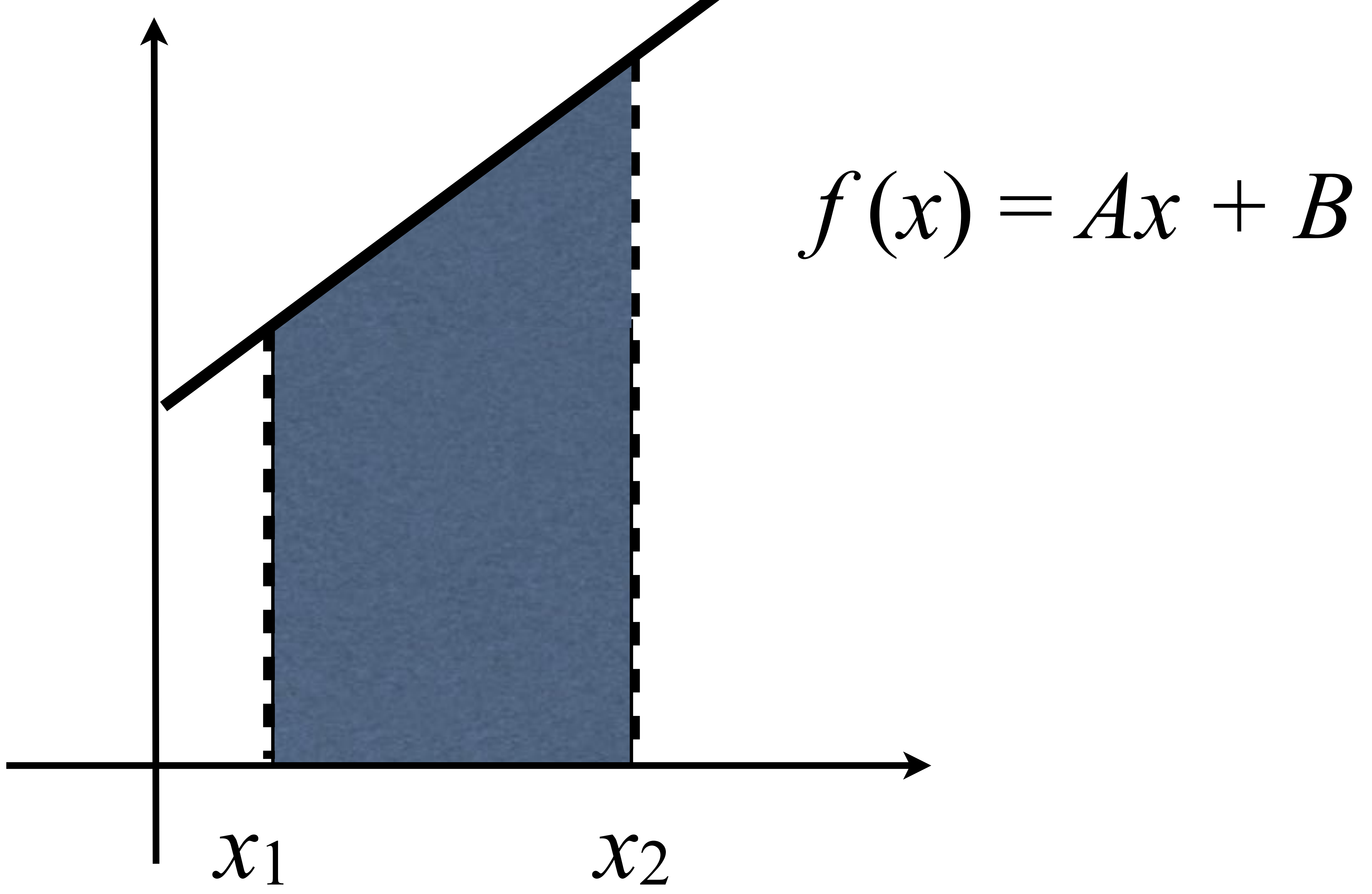
この場合は積分は
負の量になる！

$A(x_2 - x_1)$

$f(x) = A$

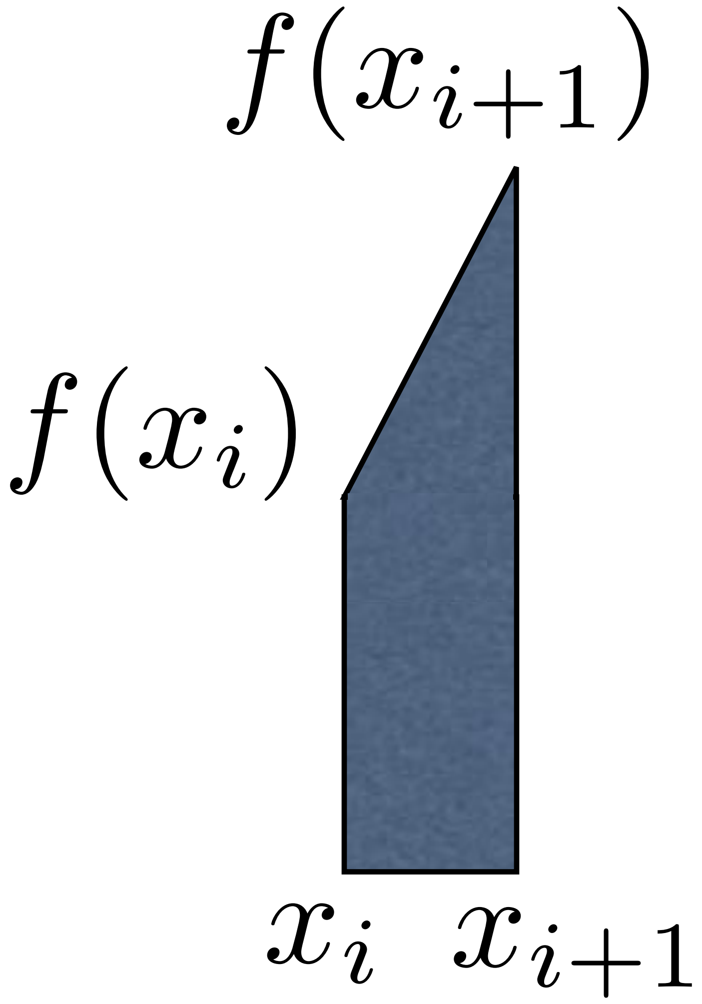


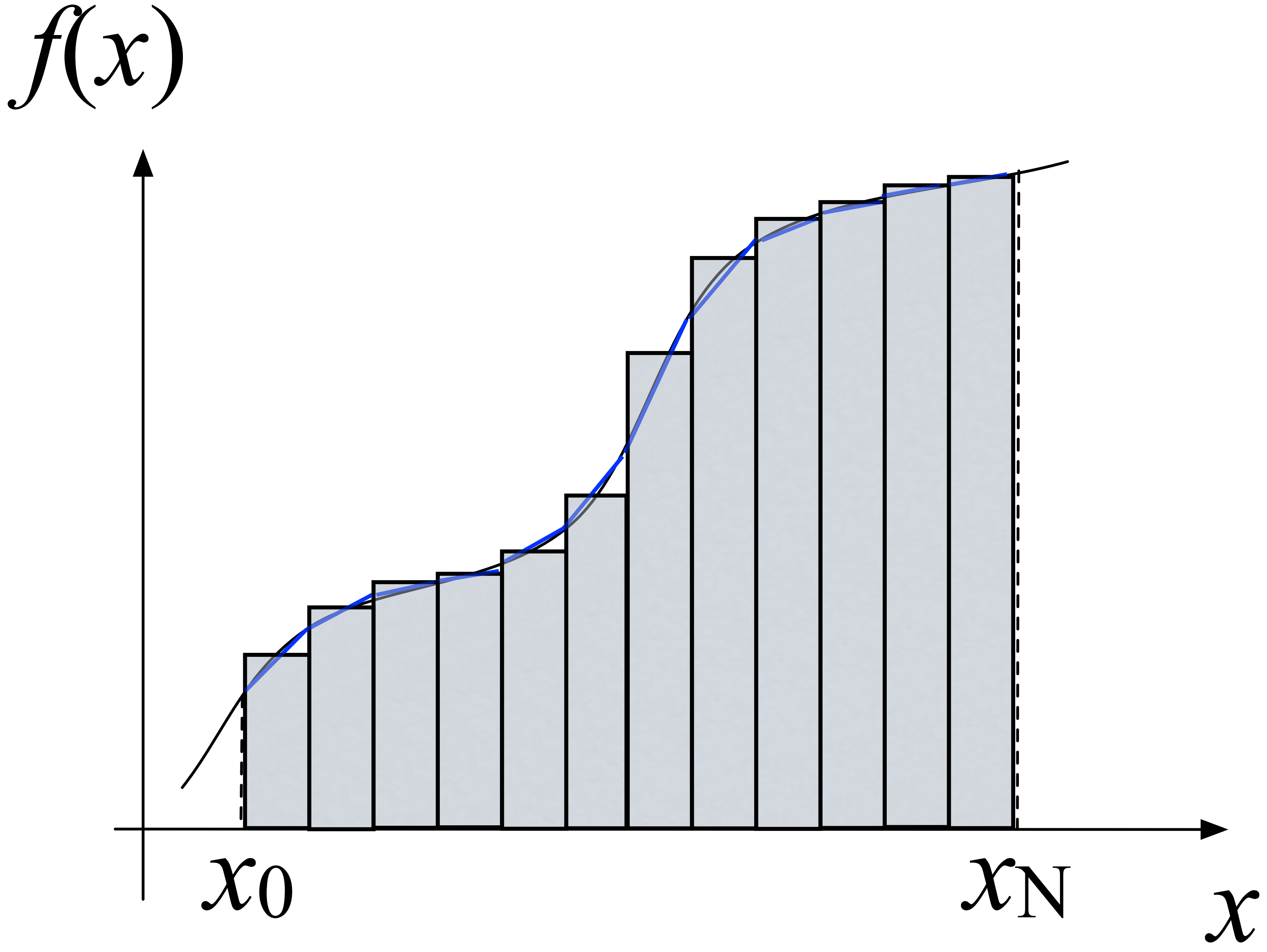
$$\int_{x_1}^{x_2} A dx = [Ax]_{x_1}^{x_2} = A(x_2 - x_1)$$



$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} (Ax + B)dx &= \left[\frac{1}{2}Ax^2 + Bx\right]_{x_1}^{x_2} \\
&= \frac{1}{2}A(x_2^2 - x_1^2) + B(x_2 - x_1) \\
&= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[A(x_1 + x_2) + 2B] \\
&= [\underbrace{(Ax_1 + B)}_{\text{上底}} + \underbrace{(Ax_2 + B)}_{\text{下底}}]\underbrace{\frac{x_2 - x_1}{2}}_{\text{高さ/2}}
\end{aligned}
$$

積分





$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i)$$ ☞台形公式

$$\simeq \lim_{dx\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)dx$$ ☞短冊の面積の和

「微分」の積分

$$\int_a^b \frac{df}{dx}dx = [f]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_N} \frac{df}{dx}dx &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} f'(x_i)\Delta x \\
&\simeq \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}\Delta x \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \\
&= f(x_N) - f(x_{N-1}) + \ldots. \\
&\quad + f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0) \\
&= f(x_N) - f(x_0)
\end{aligned}$$

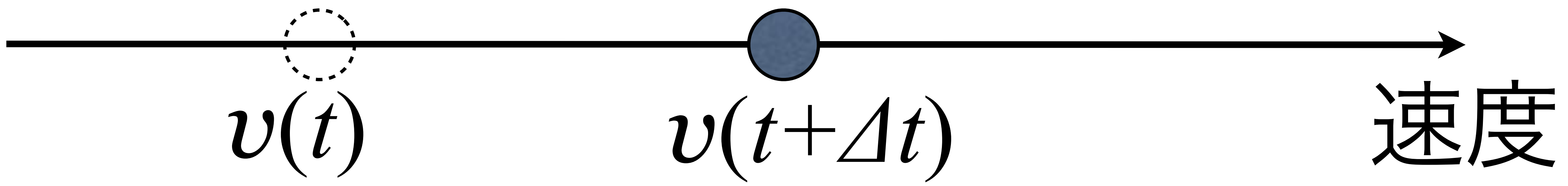
元の力学に戻ります

速度変化 / 時間 = $\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{(t+\Delta t)-t}$

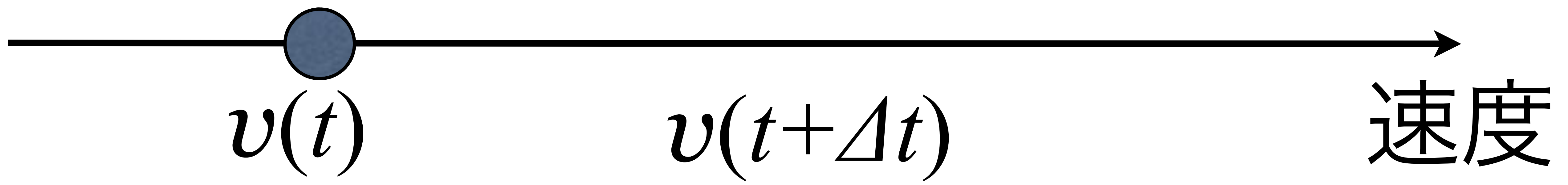
割る

加速度：$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\dfrac{dv(t)}{dt}=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

[m s^{-2}]

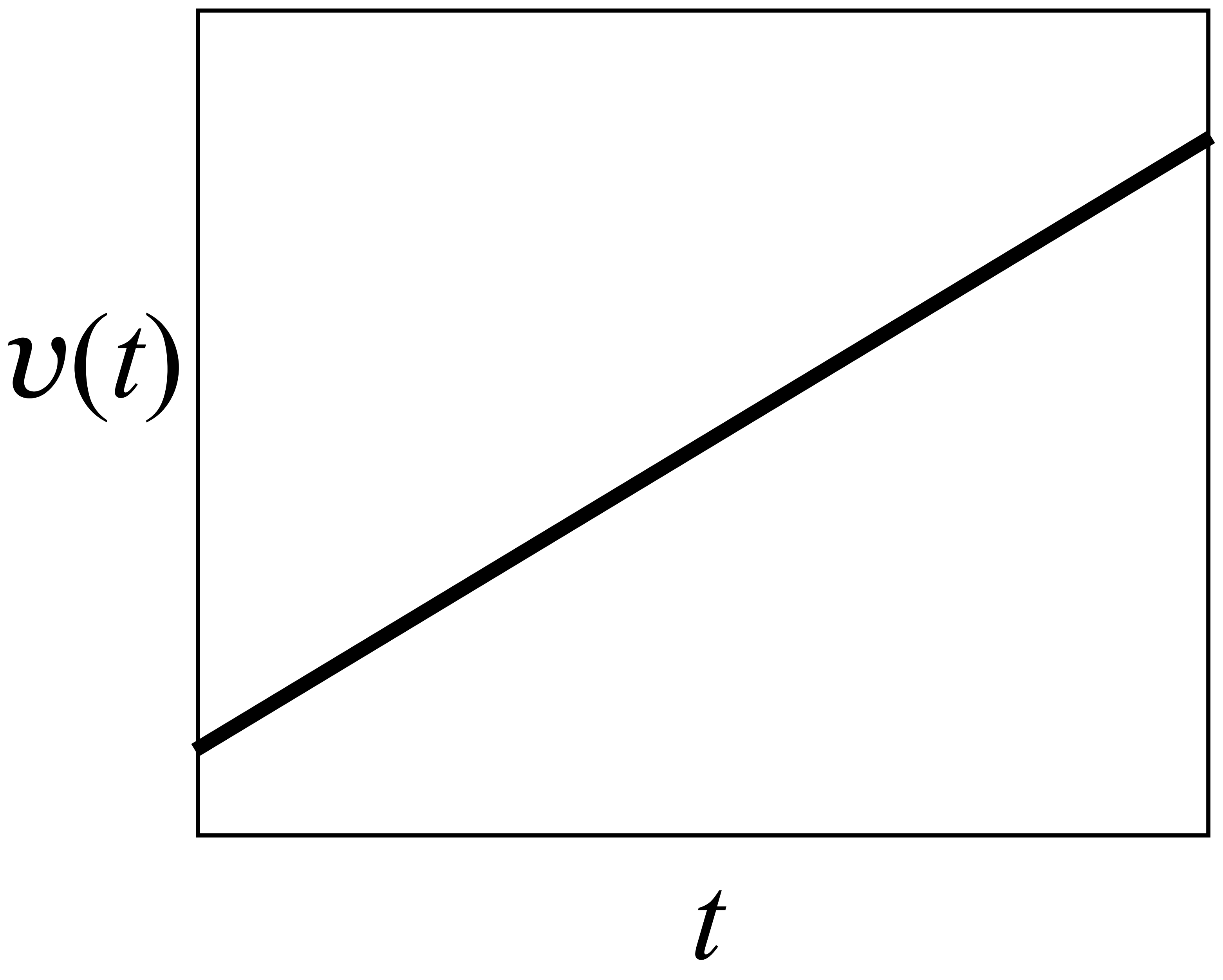


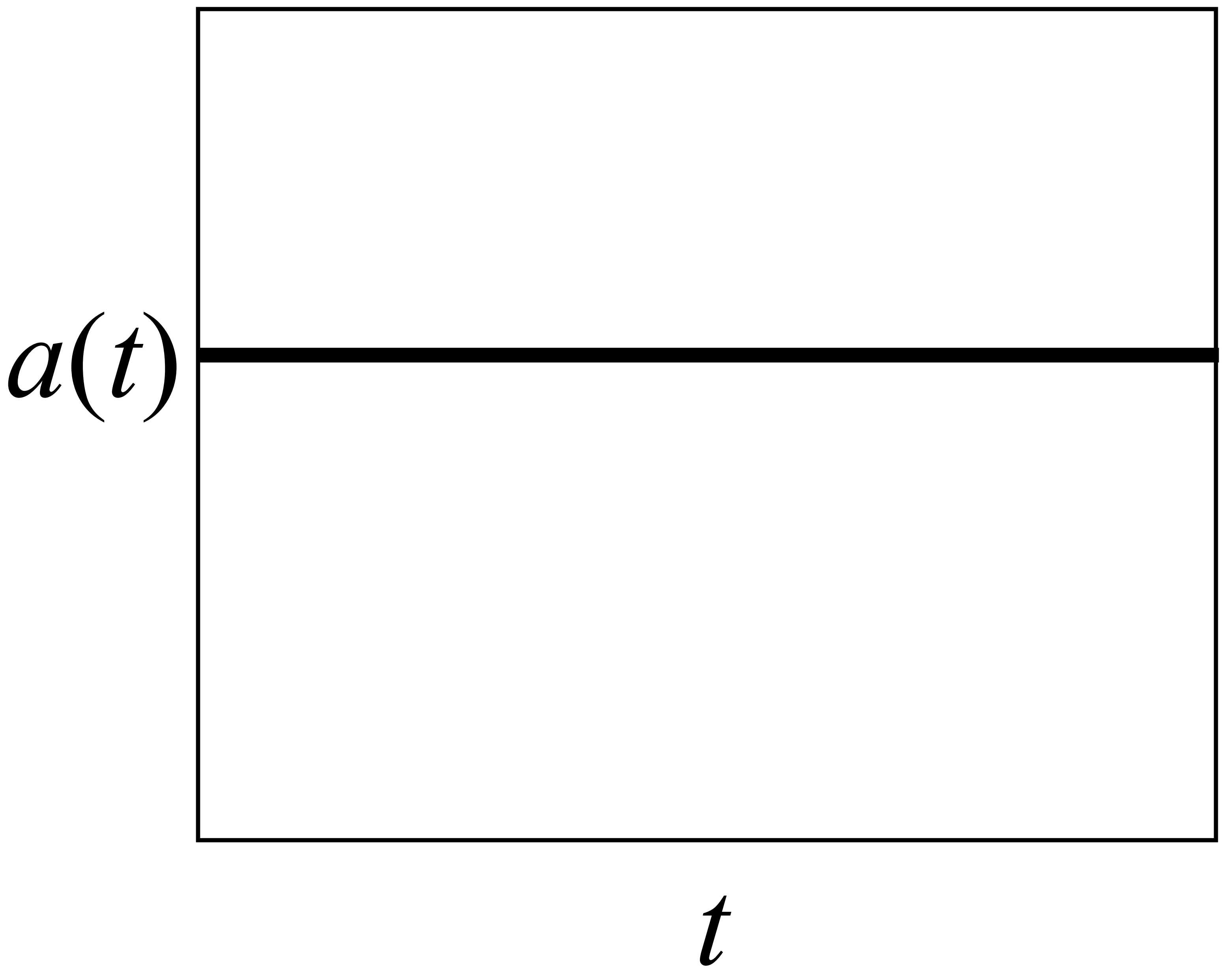
等加速度運動

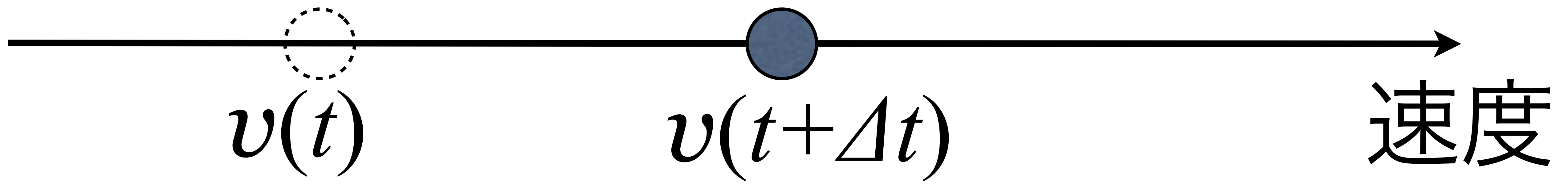


等加速度運動

等加速度運動なら加速度は定数

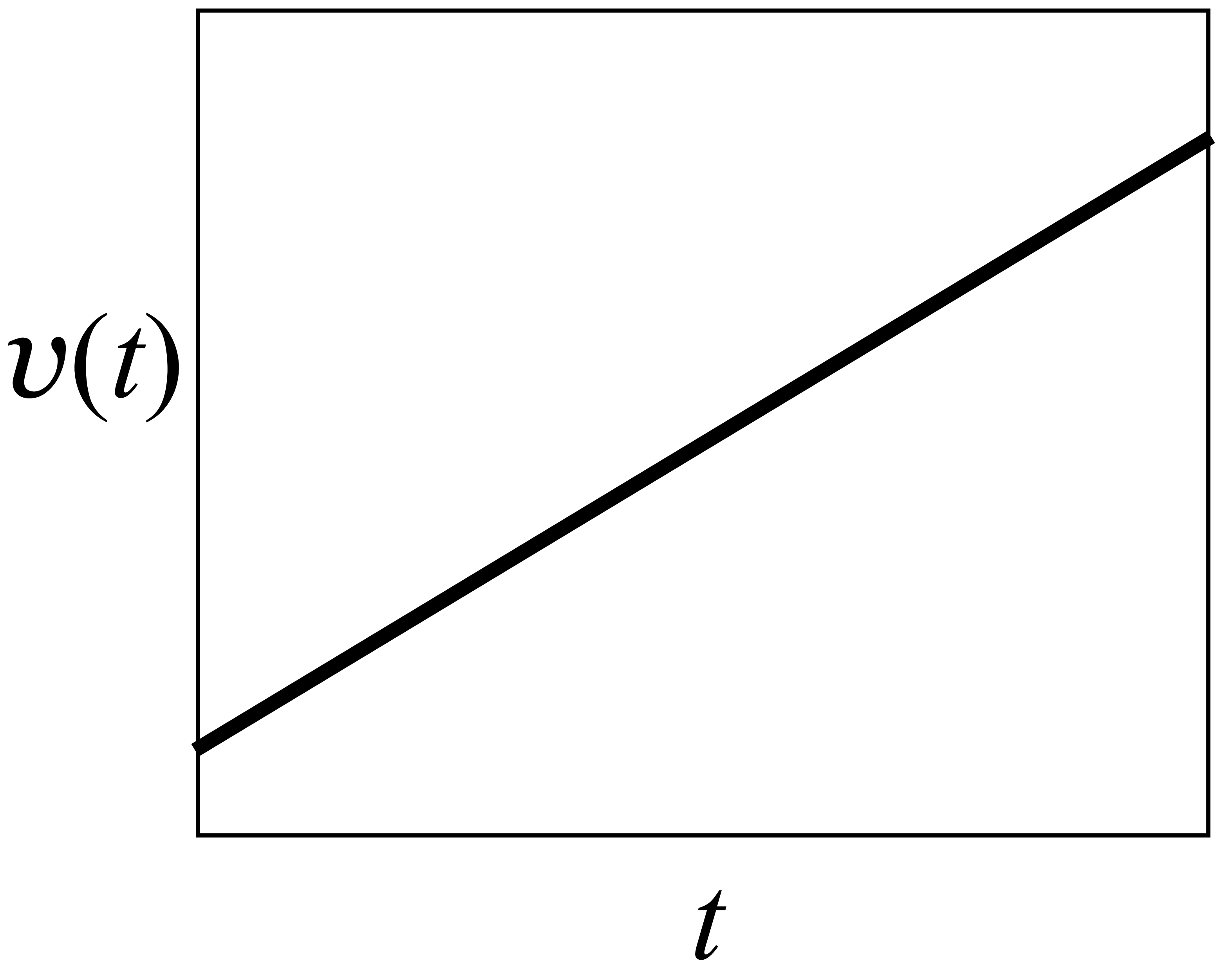


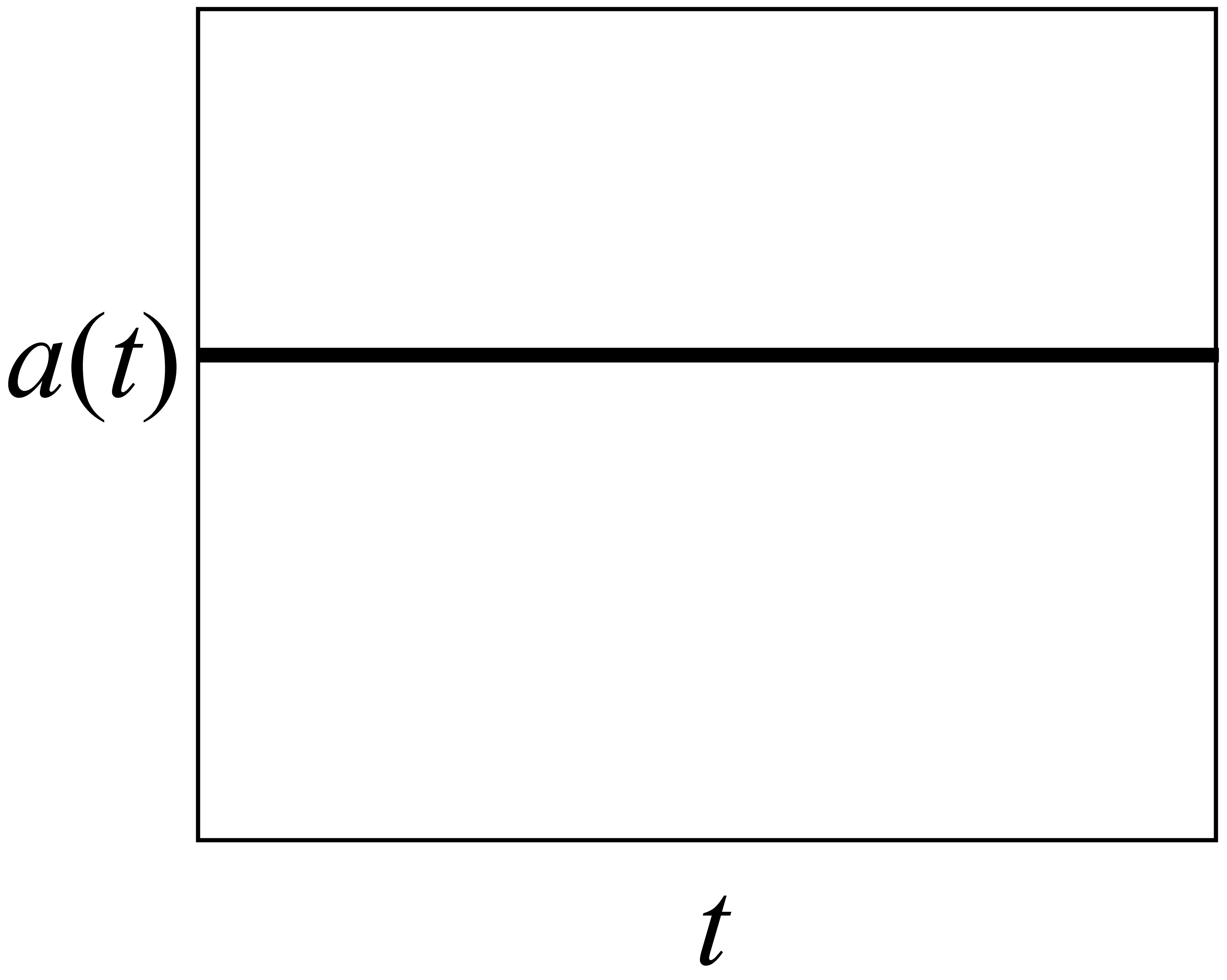




等加速度運動

等加速度運動なら加速度は定数





時間で 微分　微分

$$x(t) \rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$$

$$x(t) \leftarrow v(t) \leftarrow a(t)$$

時間で 積分　積分

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\int_0^t a(t')dt' = \int_0^t \frac{dv(t')}{dt'}dt'$$

$$\int_0^t a(t')dt' = [v(t')]_0^t = v(t) - v(0)$$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')dt'$$

積分変数をt'にして$t = 0$からt' $= t$まで積分

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\int_0^t v(t')dt' = \int_0^t \frac{dx(t')}{dt'}dt'$$

$$\int_0^t v(t')dt' = [x(t')]_0^t = x(t) - x(0)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt'$$

積分変数をt'にして$t = 0$からt' = tまで積分

等加速度運動

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')dt' = v(0) + at$$

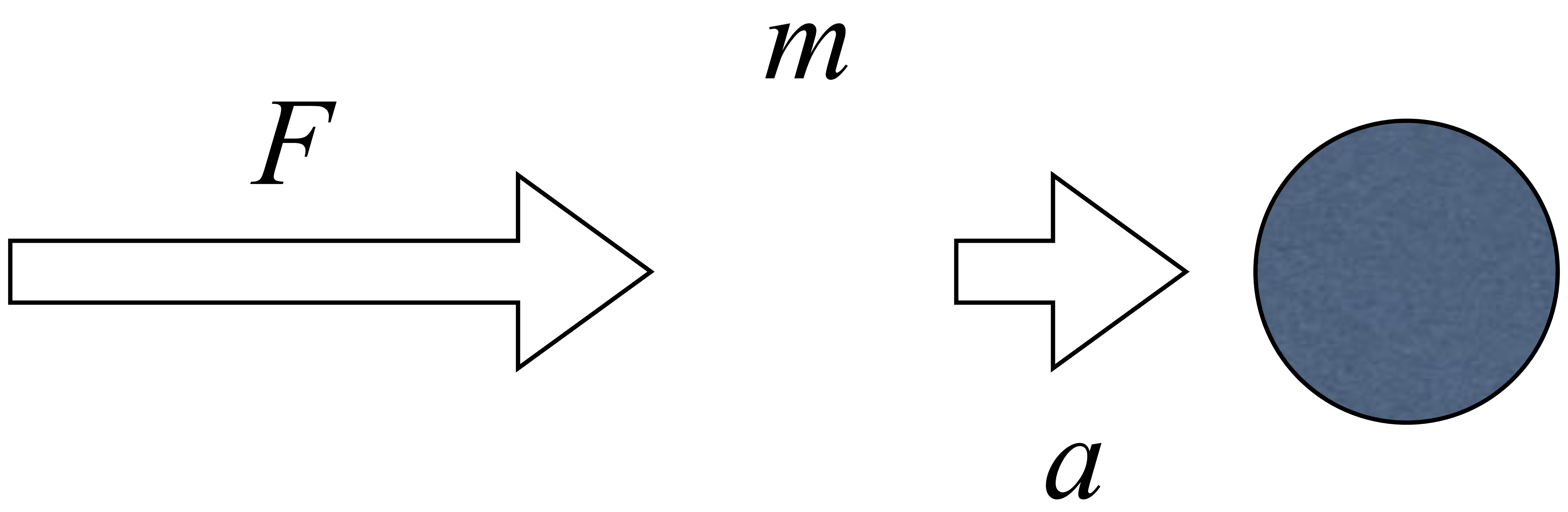
$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt' = x(0) + \int_0^t [v(0) + at]dt'$$

$$= x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

積分変数をt'にして$t = 0$から$t' = t$まで積分

Newtonの運動方程式:

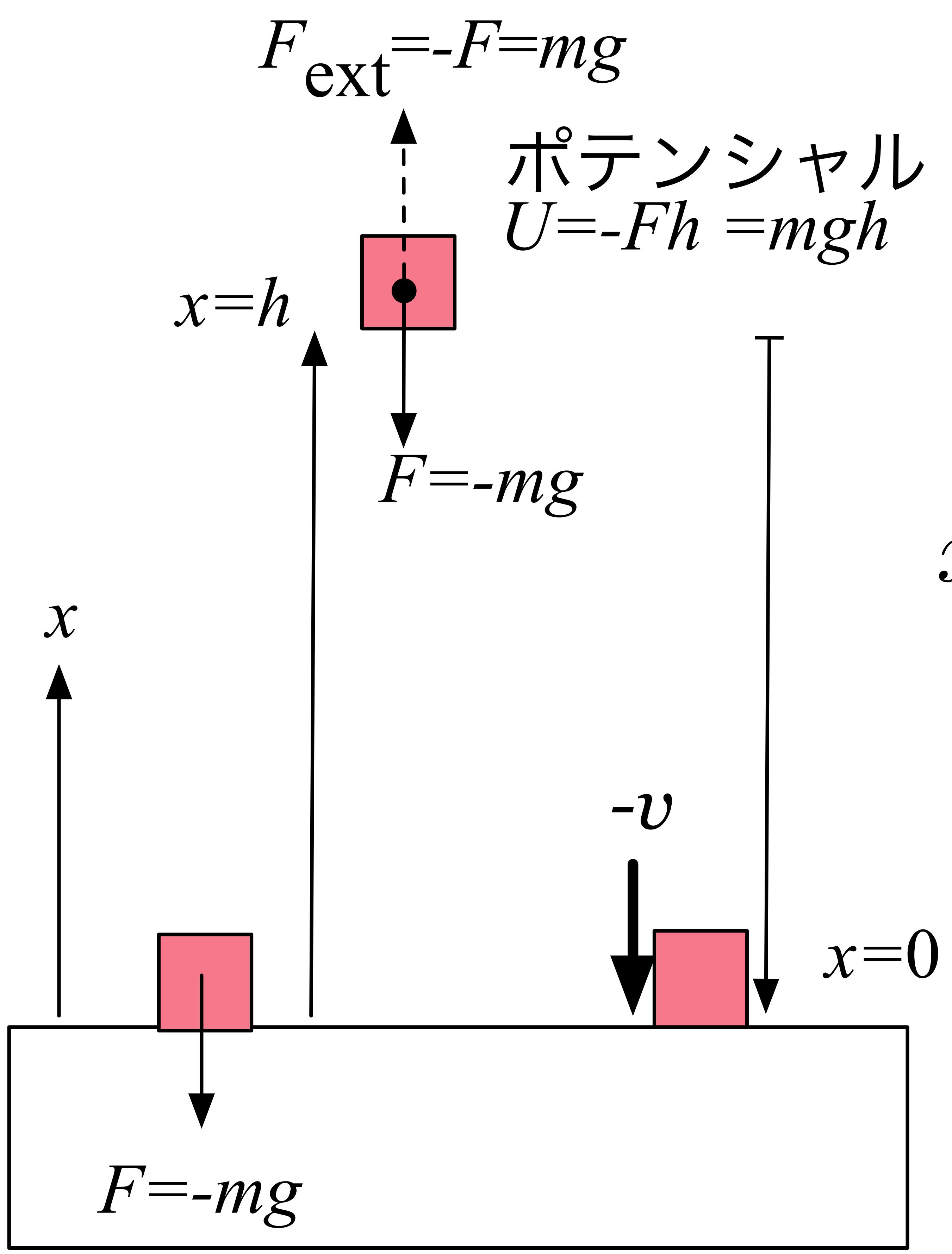
質量mをもつ物体に力Fがかかると，加速度aが生じる



$$\boxed{F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}}$$

[N] $\qquad\qquad$ [kg m s^{-2}]

時間で 積分



$$F = -mg$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g$$

$$v(t) = -gt$$

$$\int_0^t v(t')\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = x(t) - x(0)$$

$$x(t) - x(0) = 0 - h = \int_0^t v(t')\mathrm{d}t' = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2g}v^2$$

$$mgh = mg\frac{1}{2g}v^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{mgh + 0} = \boxed{0 + \frac{1}{2}mv^2}$$

Before　　After

ポテンシャル＋運動エネルギーは一定→エネルギー保存則
(位置エネルギー)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

mに無関係

Apollo 15 astronaut Dave Scott drops a hammer and a feather on the moon to demonstrate gravity.

Newtonの運動方程式

→エネルギー保存測

場所xで

積分

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx$$

x_1からx_2まで積分

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = vdt$$

xからtへ変数変換

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = m\int_{t_1}^{t_2} v\frac{dv}{dt}dt = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(v^2)dt$$

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F dx}_{\text{力×距離}=\text{仕事}} = \underbrace{\frac{m}{2}v(t_2)^2 - \frac{m}{2}v(t_1)^2}$$

力×距離

=仕事

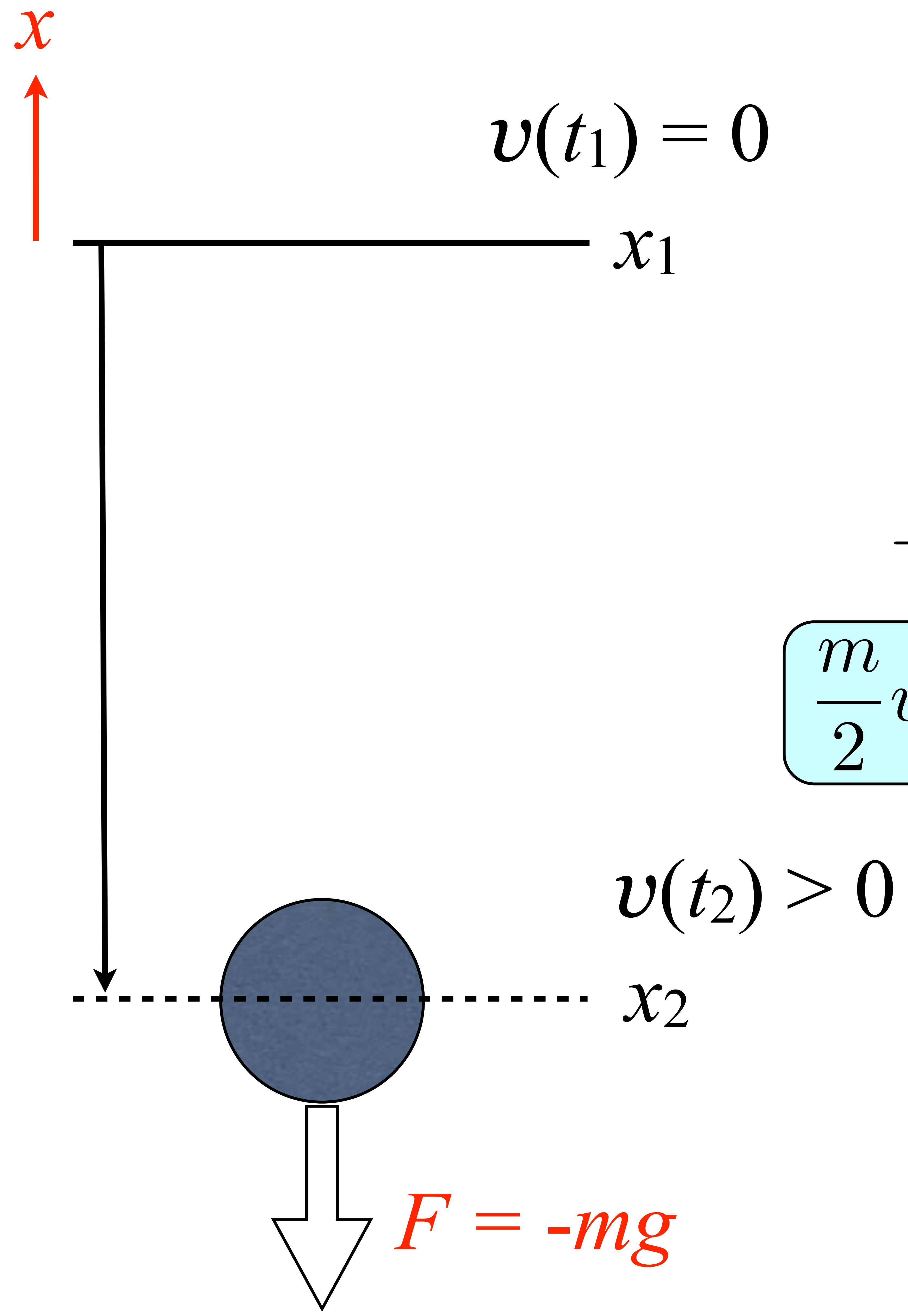
⇒運動エネルギー変化

「仕事が加えられたとき，
結果としてエネルギーが変化する」
という因果関係（原因と結果）
をあらわしている
（山本義隆　新・物理入門）

[N m]=[J]　　[kg m^2 s^{-2}]=[J]

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}v^2 = \frac{1}{2}2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_N} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{\Delta t}\Delta t \\
&= \cancel{f(t_2)} - f(t_1) + \cancel{f(t_3)}\cancel{-f(t_2)} + \ldots + f(t_N)\cancel{-f(t_{N-1})} \\
&= f(t_N) - f(t_1)
\end{aligned}$$



例：重力（一定）

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \frac{m}{2} v(t_2)^2 - \frac{m}{2} v(t_1)^2$$

$$-mg(x_2 - x_1) = \frac{m}{2} v(t_2)^2 - \frac{m}{2} v(t_1)^2$$

$$\boxed{\frac{m}{2} v(t_1)^2 + mgx_1 = \frac{m}{2} v(t_2)^2 + mgx_2}$$

運動エネルギー　＋

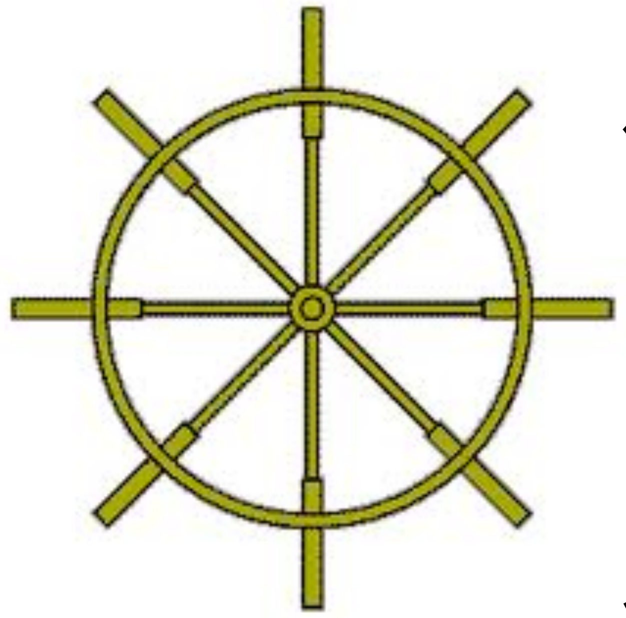
位置エネルギー

は一定

エネルギー保存則

水の流れ

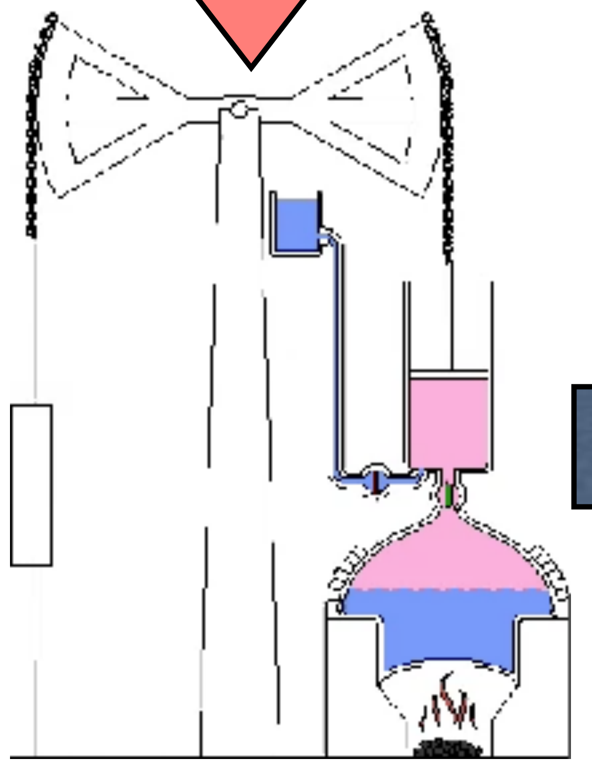
力学mechanics



位置エネルギー
↓
運動エネルギー

熱：高温源

熱力学
thermodynamics



仕事

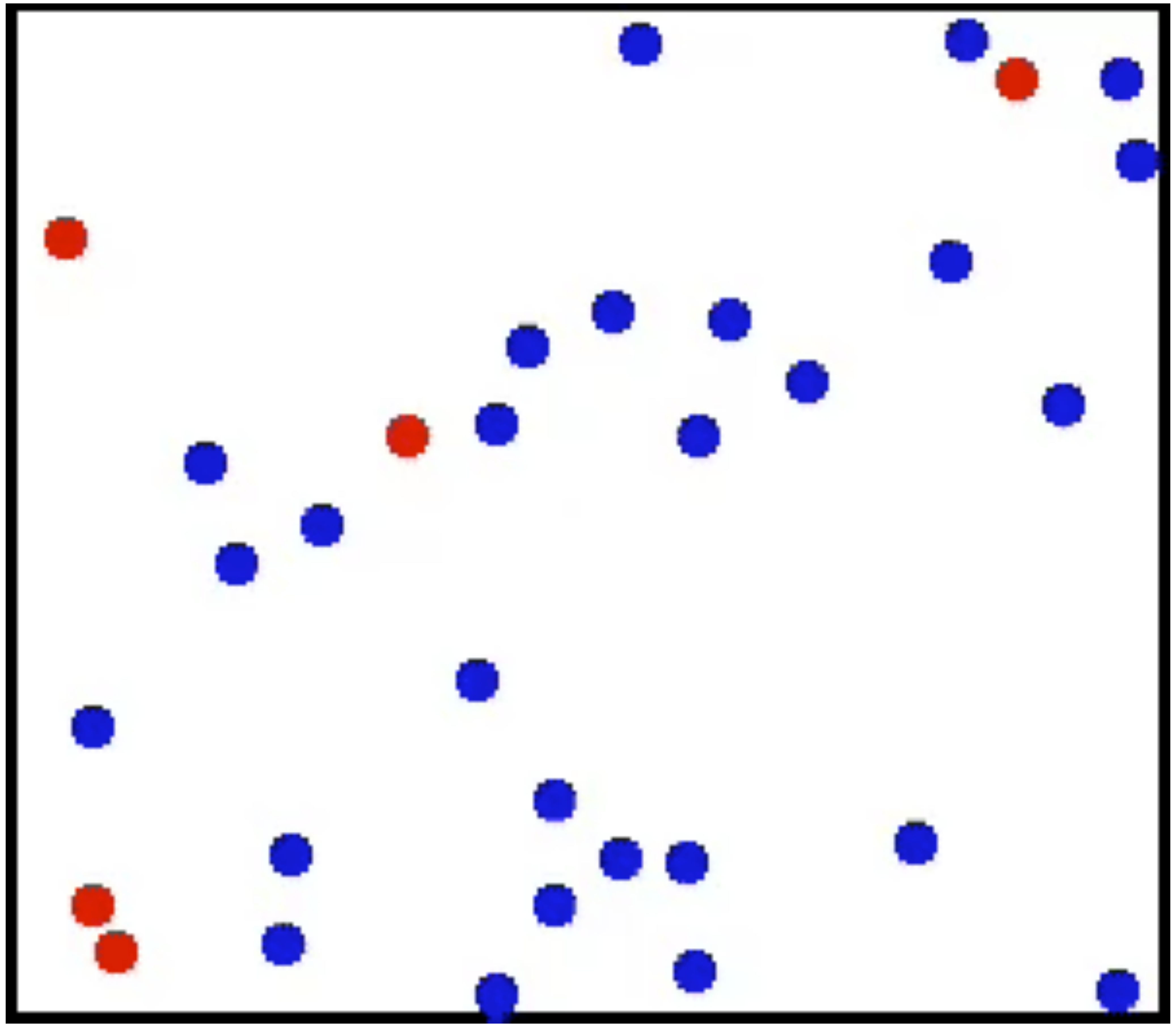
熱：低温源

エネルギー保存　→　？？？

$$PV=nRT$$

を力学から導く

分子運動論

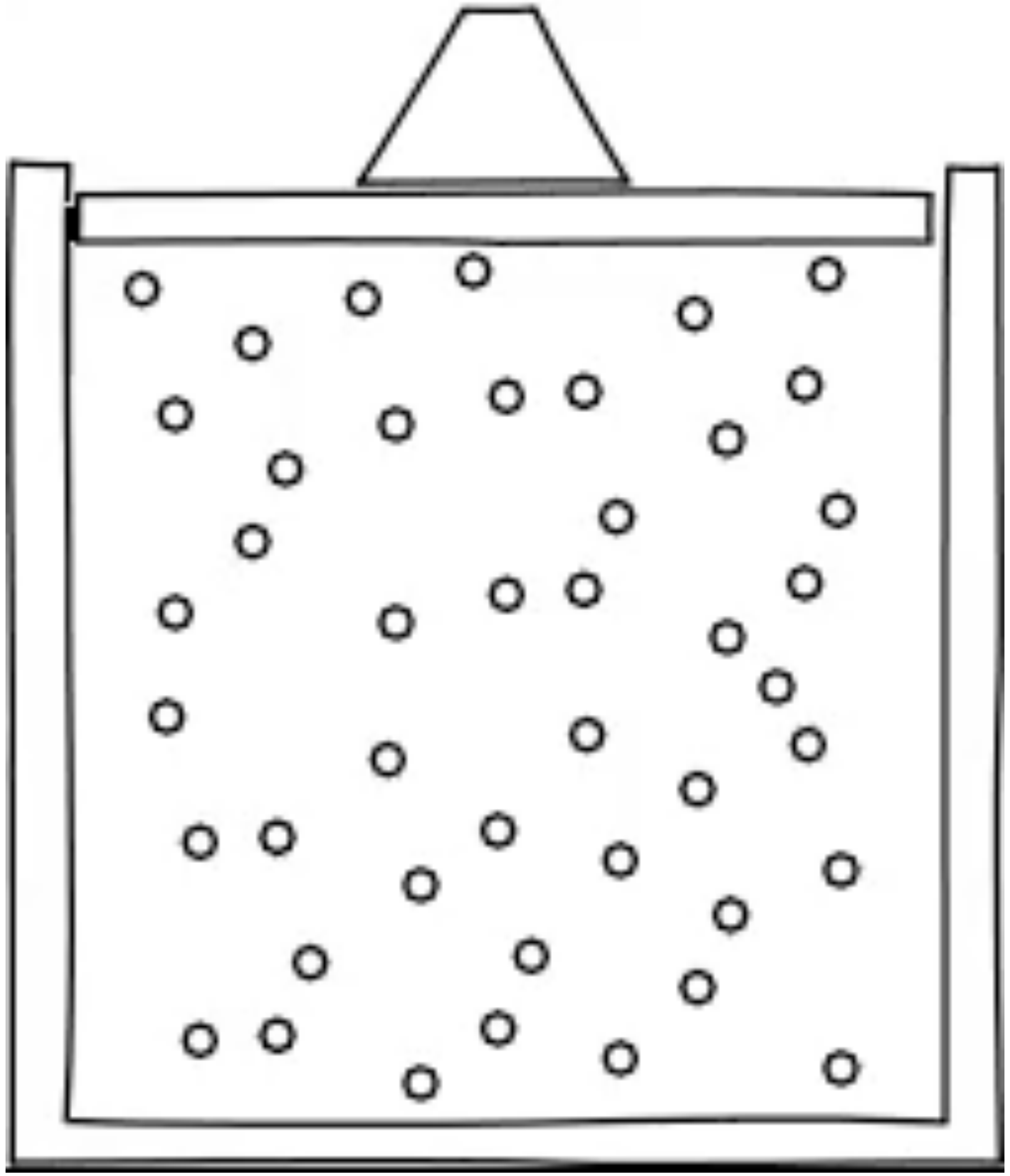


理想気体：大きさなし，相互作用無し

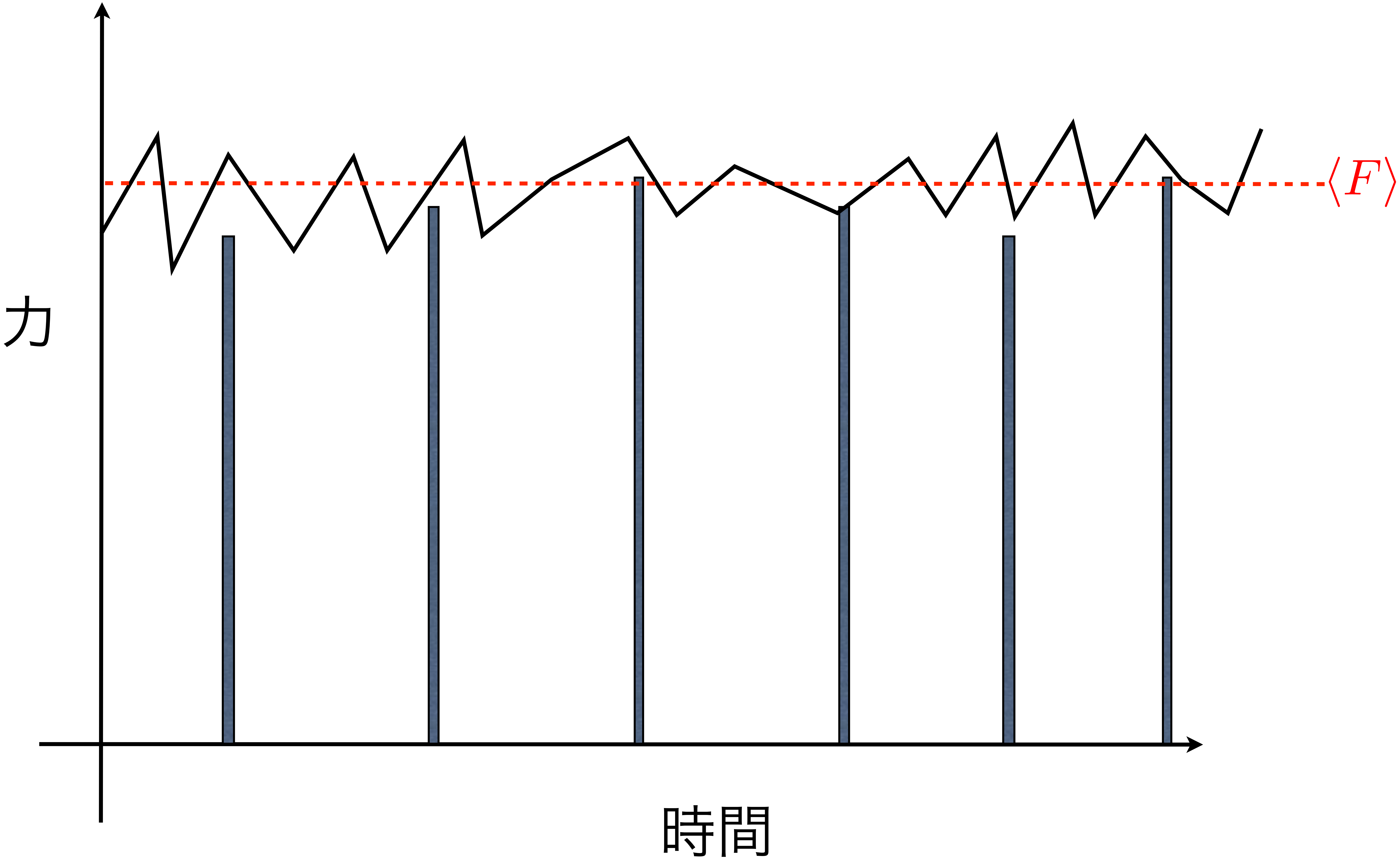
理想気体：大きさなし，相互作用無し

内部エネルギー ＝ 運動エネルギーの総和

→　温度のみの関数（理想気体）



圧力
すなわち
理想気体の
状態方程式
を
導こう


力
$\langle F \rangle$
時間

理想気体の状態方程式
と力学

時間tで
積分

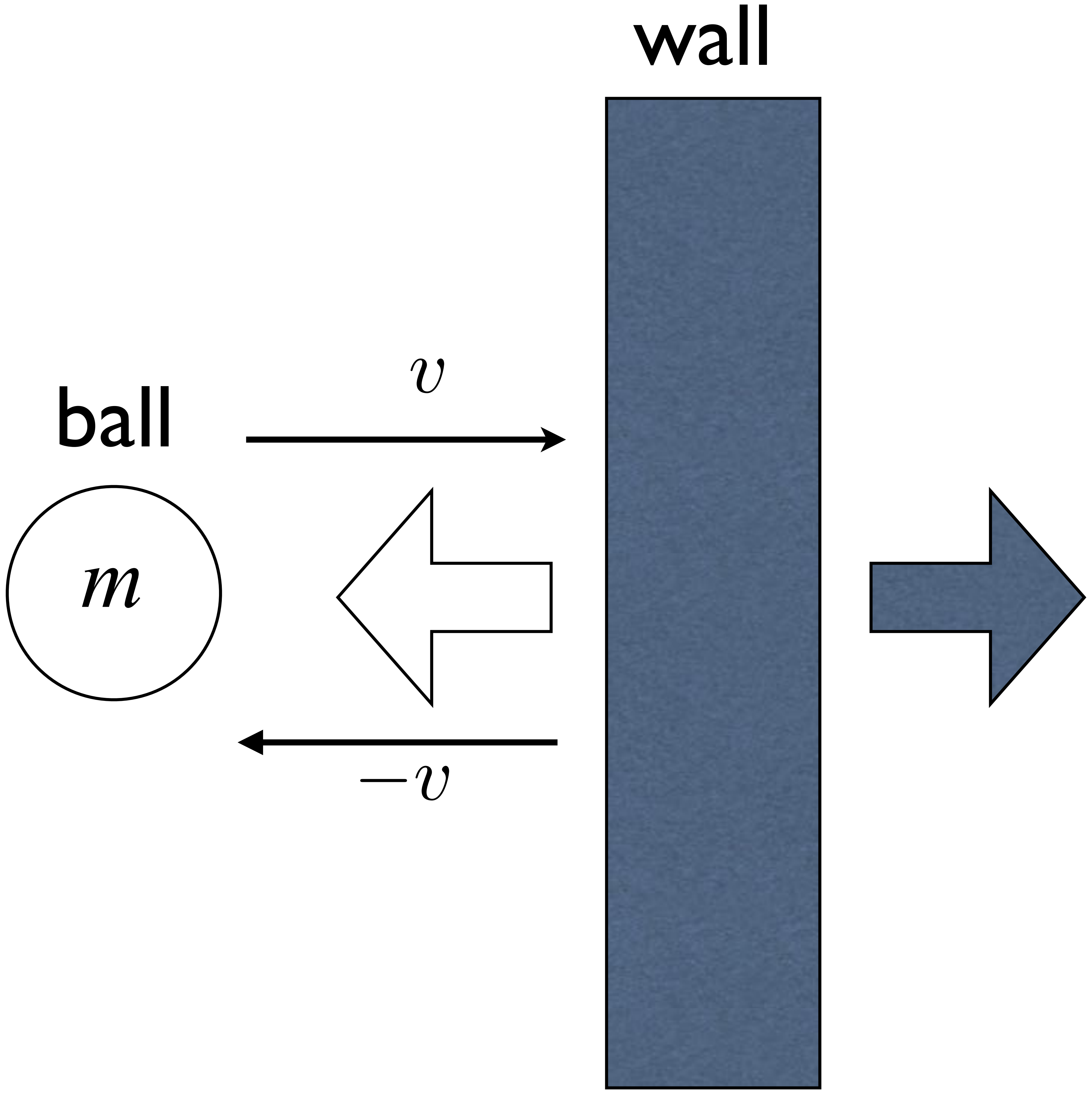
$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} F dt}_{\text{力積}} = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}dt = \underbrace{mv(t_2) - mv(t_1)}_{\text{運動量変化}}$$

今度は時間で積分

「運動変化の原因として力積が加えられた結果，運動量が変化する」という因果関係（原因と結果）をあらわしている（山本義隆　新・物理入門）

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt \simeq \underbrace{\langle F \rangle}_{\substack{\text{力の}\\\text{時間平均}\\\text{(定数)}}} \underbrace{\Delta t}_{=t_2 - t_1} = m[v(t_2) - v(t_1)]$$



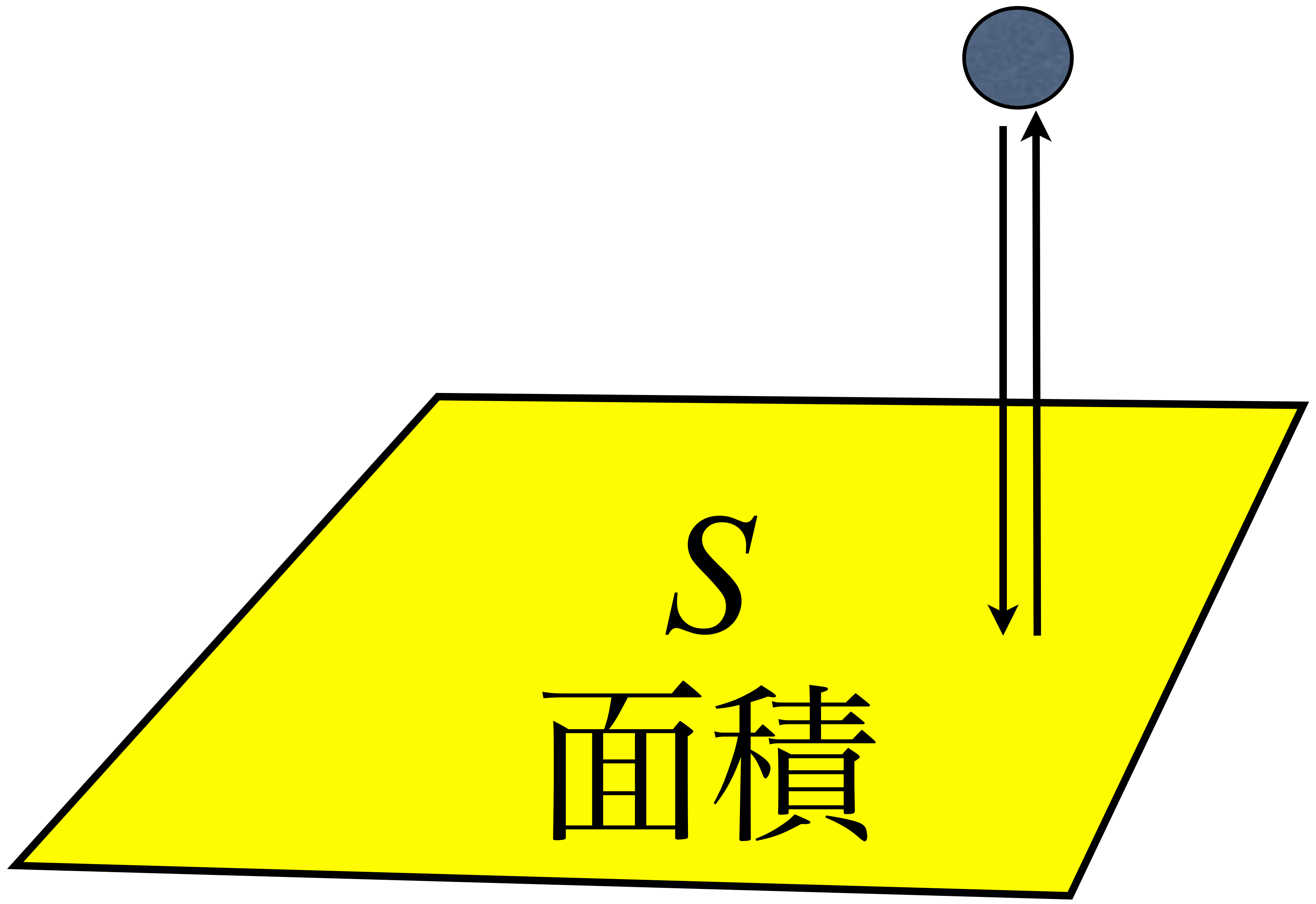
after before

$$\langle F_{\mathrm{ball}}\rangle \Delta t = m(-v - v) = -2mv$$

$$\langle F_{\mathrm{ball}}\rangle \Delta t = -\langle F_{\mathrm{wall}}\rangle \Delta t$$:作用・反作用

$$\langle F_{\mathrm{wall}}\rangle \Delta t = 2mv$$

$$< F_{\mathrm{wall}} > = PS$$

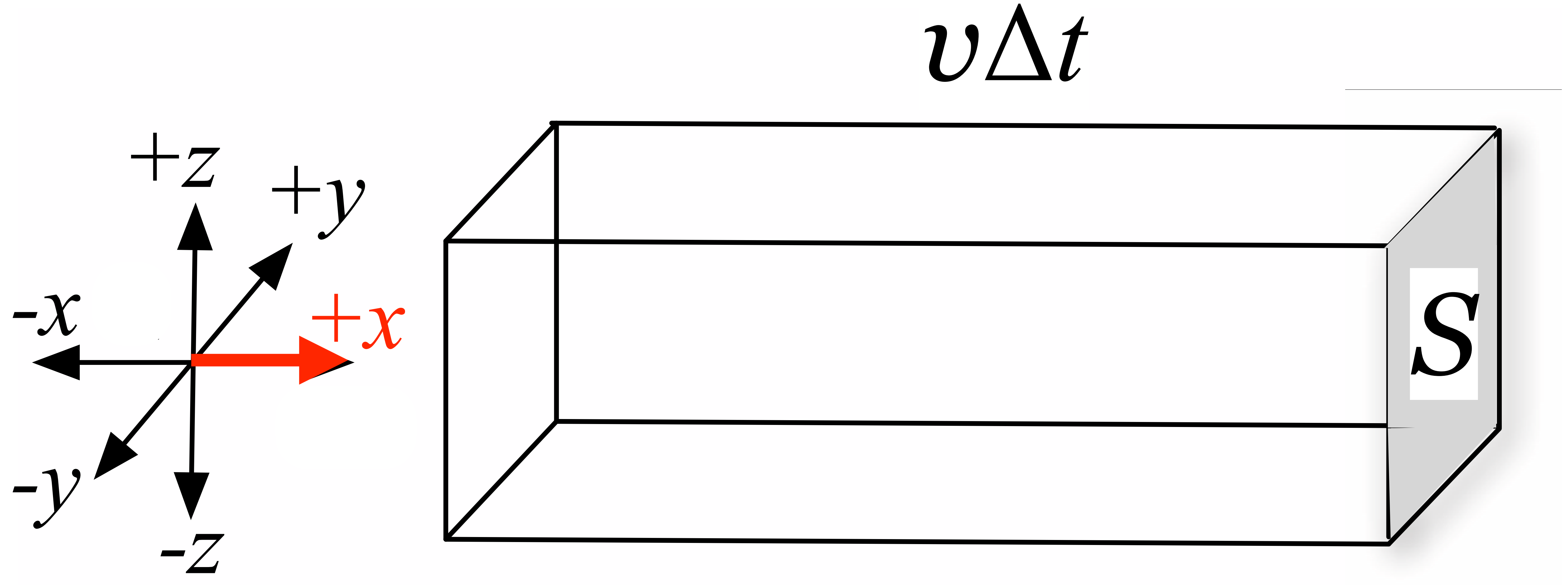


気体は，体積V [m^3],　分子数Nで存在するとする

気体は速度vで$\pm x, \pm y, \pm z$のみに運動

以下の直方体内にある分子の1/6は全てΔt秒間に気体が壁を叩く。Δt秒間に気体が壁を叩く分子数は

$$\frac{1}{6}(Sv\Delta t)\frac{N}{V}$$



$$
\begin{aligned}
\langle F_{\mathrm{wall}} \rangle = PS &= \frac{2mv}{\Delta t}\frac{1}{6}(Sv\Delta t)\frac{N}{V} \\
P &= \frac{1}{3}\frac{N}{V}mv^2 \\
PV &= \frac{2}{3}N(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{2}{3}E_{\mathrm{kinetic}} \\
E_{\mathrm{kinetic}} &= \frac{3}{2}nRT \quad \text{(from statistical mechanics)} \\
PV &= \frac{2}{3}\frac{3}{2}nRT = nRT
\end{aligned}
$$

統計力学から

$$\langle F_{\text{wall}} \rangle = P\underset{\text{微小面積}}{dA} = \frac{2mvM}{\Delta t} = \frac{\rho}{3}mv^2 dA$$

$$M = \frac{\rho}{6}v\Delta t dA$$

M:Δtの時間内にdAを叩く分子数

$$\rho = \frac{N}{V}$$

:数密度

$$P = \frac{N}{3V}mv^2 = \frac{2}{3V}\frac{Nmv^2}{2}$$

$$PV = \frac{2}{3}\frac{Nmv^2}{2} = \frac{2}{3}E_{\text{kinetic}}$$

number of molecules inside the box

$\rho v \Delta t$ dA $\rightarrow$ M = 1/6($\rho v \Delta t$ dA)

$$E_{\text{kinetic}} = \frac{3}{2}Nk_{\text{B}}T = \frac{3}{2}nRT$$

統計力学（３年）

$$PV = nRT$$

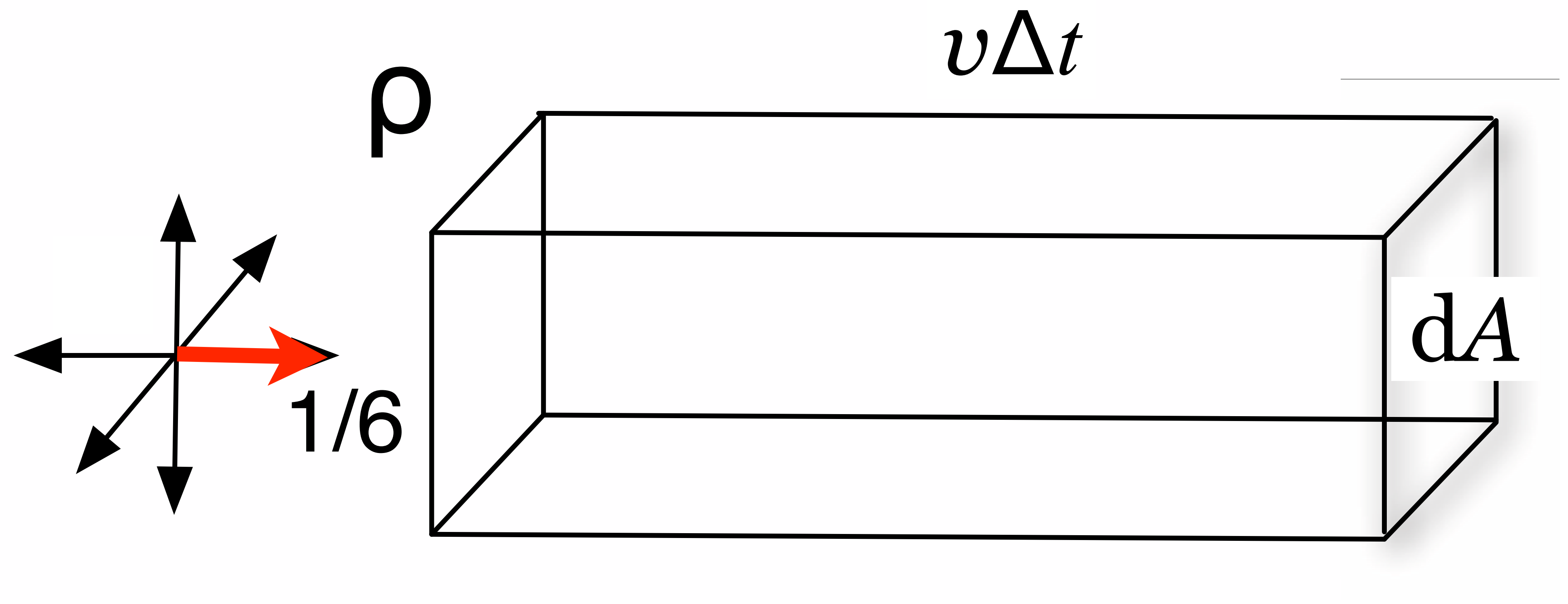


Figure 2: