

極限と自然対数を入れ替えたが以下より問題ないことがわかる

$$x \ll 1$$

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) \simeq 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = 1$$

一方

$$\ln \underbrace{\left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right]}_{=e} = \ln e = 1$$