以下の 1)-4)の級数の和についてはよく用いられるが, 公式はすぐに忘れるため, 公式を覚えるよりは式を最初から導くのがよい。

1) 等差級数： $S_n = a+(a+d)+(a+2d)+...+[a+(n-2)d]+[a+(n-1)d] = \sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)d]$

k の和に関しての昇順と降順に並べ和をとる。

$$\begin{aligned} S_n &= a+(a+d)+(a+2d)+...+[a+(n-2)d]+[a+(n-1)d] \\ S_n &= [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+...+(a+d)+a \\ 2S_n &= n[2a+(n-1)d] \\ S_n &= na+\frac{n(n-1)}{2}d \end{aligned}$$

$a=1, d=1$ の場合

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = n+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

となる。

2) 等比級数： $S_n = a+ar+ar^2+...+ar^{n-2}+ar^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$

この場合は, S_n に r を乗じ S_n から引き算する。

$$\begin{aligned} S_n &= a+ar+ar^2+...+ar^{n-2}+ar^{n-1} \\ rS_n &= \quad ar+ar^2+ar^3+\ ...\ +ar^{n-1}+ar^n \\ S_n-rS_n &= a-ar^n \\ S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \end{aligned}$$

ただし, $r=1$ の時は, $S_n = na$ となる。

また, $|r|<1$ の時 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ なので, $S_{n\to\infty} = \frac{a}{1-r}$ となる。

3) 2 乗の和： $1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

$(k-1)^3-k^3 = -3k^2+3k-1$ を考える。k を 1 から n まで和をとる。左辺は,
$(0^3-1^3)+(1^3-2^3)+(2^3-3^3)+\ldots+[(n-2)^3-(n-1)^3]+[(n-1)^3-n^3] = 0^3-n^3$ となる。

右辺は $-3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} 1 = -3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\frac{n(n+1)}{2}-n$ となる。従って,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4) 3 乗の和：$1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$ は，

$$(k-1)^4 - k^4 = (k^2-2k+1)(k^2-2k+1)^2 - k^4 = k^4-2k^3+k^2-2k^3+4k^2-2k+k^2-2k+1-k^4$$
$$= -4k^3+6k^2-4k+1$$

を考える。k を 1 から n まで和をとる。左辺は，$(0^4\text{-}1^4) + (1^4\text{-}2^4) + (2^4\text{-}3^4) + \ldots + [(n\text{-}2)^4\text{-}(n\text{-}1)^4] + [(n\text{-}1)^4\text{-}n^4] = 0^3\text{-}\ n^4$

右辺は

$$-4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = -4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$

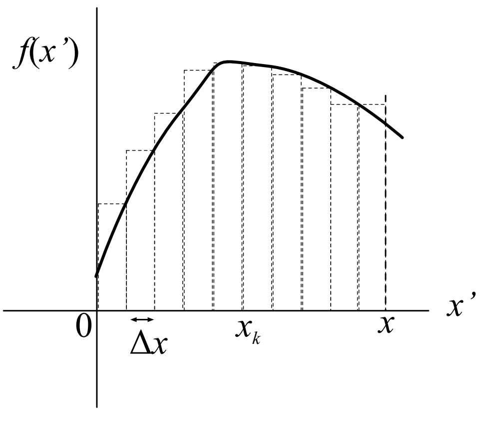
となる。従って，

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = n^4 + n(n+1)(2n-1) + n = n(n^3+2n^2+n-1+1)$$
$$= n^2(n^2+2n+1) = n^2(n+1)^2$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

となる。

上の式の応用として以下の積分の例がある。以下の定積分は $f(x')$ の $x' = 0$ から $x'=x$ までの曲線と x'軸の間の面積を表す。従って，0 から x までを N 等分して，$\Delta x = x/N, x_k = k\Delta x$ とすると，以下のようになる。

$$\int_0^x f(x')\mathrm{d}x' = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x$$



$f(x)=a$ （定数)の場合，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x=(x/N)a\sum_{k=1}^{N}1=(x/N)aN=ax$$ となり，

$f(x)=ax$ の場合，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x=a(\Delta x)\sum_{k=1}^{N}x_k=a(\Delta x)\sum_{k=1}^{N}k\Delta x=a(\Delta x)^2\frac{N(N+1)}{2}=a\frac{x^2}{N^2}\frac{N(N+1)}{2}=\frac{1}{2}ax^2$$

$f(x)=ax^2$ の場合は，同じく

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x=a(\Delta x)\sum_{k=1}^{N}x_k^3=a(\Delta x)\sum_{k=1}^{N}(k\Delta x)^3=a(\Delta x)^4\frac{N^2(N+1)^2}{4}=a\frac{x^4}{N^4}\frac{N^2(N+1)^2}{4}=\frac{1}{4}ax^4$$

$f(x)=ax^3$ の場合は，同じく以下のようになる。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x=a(\Delta x)\sum_{k=1}^{N}x_k^3=a(\Delta x)\sum_{k=1}^{N}(k\Delta x)^3=a(\Delta x)^4\frac{N^2(N+1)^2}{4}=a\frac{x^4}{N^4}\frac{N^2(N+1)^2}{4}=\frac{1}{4}ax^4$$