

スターリングの公式: Stirling's formula

Masahiro Yamamoto

9:25 pm September 26, 2017

1 スターリングの公式: Stirling's formula ゆるいバージョン: 通常はこれでOK

スターリングの公式 $\ln N! \simeq N \ln N - N, (N \gg 1)$ ¹を導く。

$$\ln N! = \ln[N(N-1)(N-2)\dots 321] = \sum_{k=1}^N \ln k \quad (1)$$

図に示すように $\ln x$ は x の単調増加関数である。図中の2つの長方形の面積と積分の関係より、 k を整数とし

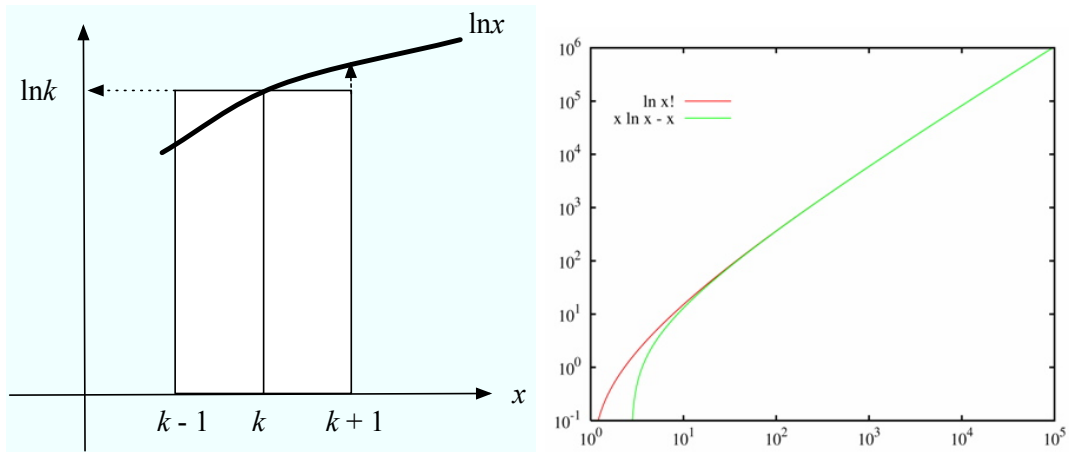


Figure 1: k vs $\ln k$ (left),

$\ln N!$ vs $N \ln N - N$ (right)

て、以下の関係が成り立つことがわかる。

$$\int_{k-1}^k dx \ln x \leq [k - (k-1)] \ln k, \quad [(k+1) - k] \ln k \leq \int_k^{k+1} dx \ln x \quad (2)$$

$$\int_{k-1}^k dx \ln x \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} dx \ln x \quad (3)$$

$k = 1$ から $k = N$ まで和をとると

$$\int_0^N dx \ln x \leq \sum_{k=1}^N \ln k \leq \int_1^{N+1} dx \ln x \quad (4)$$

部分積分をつかうと²,

$$\int_0^N dx \ln x = \int_0^N dx (x)' \ln x = [x \ln x]_0^N - \int_0^N x(1/x) dx = N \ln N - N \quad (5)$$

$$\int_1^{N+1} dx \ln x = [x \ln x]_1^{N+1} - \int_1^{N+1} x(1/x) dx = (N+1) \ln(N+1) - N \quad (6)$$

¹ゆるい版の式。詳しくは田崎晴明「統計力学 1」の付録を参照のこと。

² $(fg)' = f'g + fg', fg = \int f'g + \int fg', \int f'g = fg - \int fg'$

故に, $N \gg 1$ の時,

$$\ln N! \simeq N \ln N - N \quad (7)$$

以下のようにもあらわすことができる。

$$e^{\ln N!} = e^{\ln N^N} e^{-N} \quad (8)$$

$$N! = N^N e^{-N} = \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (9)$$

2 厳しいバージョン: 中央極限定理の証明の際に用いる (小針, 確率・統計入門)

以上の近似式はより正確には,

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (10)$$

となるがこれを示そう。

$$N \ln N - N \leq \ln N! \leq (N+1) \ln(N+1) - N \quad (11)$$

今, $\ln N! \simeq (N+1/2) \ln N - N$ と「あたり」をつけ, そのずれを以下の様に定義する。

$$d_N \equiv \ln N! - [(N+1/2) \ln N - N] \quad (12)$$

$N+1$ の時との差をとると

$$d_{N+1} - d_N = \ln(N+1) - (N+3/2) \ln(N+1) + (N+1) + (N+1/2) \ln N - N \quad (13)$$

$$= -(N+1/2) \ln \frac{N+1}{N} + 1 = -(N+1/2) \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) + 1 \quad (14)$$

$$= -(N+1/2)[1/N - 1/(2N^2) + 1/(3N^3) - 1/(4N^4)\dots] + 1 \quad (15)$$

$$= -[1 + 1/(2N) - 1/(2N) - 1/(4N^2) + 1/(3N^2) + O(N^{-3})] + 1 \quad (16)$$

$$= -\frac{1}{12N^2} + O(N^{-3}) \quad (17)$$

$$d_{N+1} = d_N - \frac{1}{12N^2} + O(N^{-3}) \quad (18)$$

差 d_N は, $N \rightarrow +\infty$ である値 C に収束する。従って,

$$C = \lim_{N \rightarrow +\infty} \{\ln N! - [(N+1/2) \ln N - N]\} \quad (19)$$

$$e^C = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N!}{N^{N+1/2} e^{-N}} \quad (20)$$

$e^C \equiv A$ とすると,

$$A^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(N!)^2}{N^{2N+1} e^{-2N}} \quad (21)$$

$$\frac{1}{A} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(2N)^{2N+1/2} e^{-2N}}{(2N)!} \quad (22)$$

この二つをかけると

$$A = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(N!)^2 2^{2N+1/2} N^{2N+1/2}}{(2N)! N^{2N+1}} \quad (23)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2^{2N} \sqrt{2}}{\sqrt{N} [(2N)! / (N! N!)]} = \sqrt{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2^{2N}}{\sqrt{N} {}_2N C_N} \quad (24)$$

ここで ${}_N C_r = N!/[r!(N-r)!]$ の二項係数である。 $A = \sqrt{2\pi}$ となるが、まずワリスの公式を導こう。

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \quad (25)$$

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \int f'g = fg - \int fg', \quad f' = \sin x, \quad f = -\cos x, \quad g = \sin^{n-1} x \quad (26)$$

$$S_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n \quad (27)$$

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2} \quad (28)$$

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} S_0, \quad S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3} S_1 \quad (29)$$

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -(0-1) = 1 \quad (30)$$

$$\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = \left(\frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3} S_1 \right) / \left(\frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} S_0 \right) \quad (31)$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-2}{2n-3} \cdots \frac{4}{5} \frac{4}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{1} \frac{\pi}{2} \quad (32)$$

$0 < x < \pi/2$ で、

$$0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \quad (33)$$

$$0 < S_{2n+1} < S_{2n} < S_{2n-1} \quad (34)$$

$$1 < \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} < \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{S_{2n-1}}{\frac{2n}{2n+1} S_{2n-1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad (35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = 1 \quad (36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n-2)2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \quad (37)$$

最後の式をワリスの公式と呼ぶ。その式の左辺は、

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n)^2}{(2n)^2 - 1} \right] = \frac{\pi}{2} \quad (38)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2n)^2} \right] = \frac{2}{\pi} \quad (39)$$

また、式(29)より

$$S_{2n} S_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} S_0 \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3} S_1 \quad (40)$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{4}{5} \frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2} S_1 S_0 = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \quad (41)$$

$$\sqrt{n} S_{2n+1} \sqrt{\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (42)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \quad (43)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} S_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (44)$$

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \frac{2}{3} S_1 = \frac{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2}{(2n+1)!} \quad (45)$$

$$= \frac{2^2 (n)^2 2^2 (n-1)^2 \cdots 2^2 2^1 \cdot 2^2 2^0}{(2n+1)(2n)!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)(2n)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) {}_{2n} C_n} \quad (46)$$

式(44)より,

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n}S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}2^{2n}}{(2n+1)2^n C_n} \quad (47)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}\sqrt{n}}{2n+1} = 1 \quad (48)$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}2^n C_n} \quad (49)$$

従って, (20),(24) 式の $e^C = \sqrt{2\pi}$ となる。スターリングの公式は,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}} = 1 \quad (50)$$

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N} N^{N+1/2} e^{-N} \quad (51)$$

$$\ln N! \simeq \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N - N + \ln \sqrt{2\pi} \quad (52)$$