

Navier-Stokes equation for incompressible fluid:

$$\text{Eq(6.9): } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

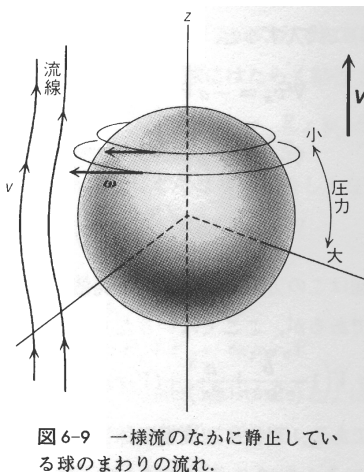
Here $\mathbf{v}$ is the velocity, ρ is the density, P is the pressure, η is the viscosity, $\mathbf{f}$ is the external force. Since the fluid is incompressible, then

$$\text{Eq(6.24): } \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Stokes' law of resistance:

slow flow rate around a sphere $\Rightarrow (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \simeq 0$

$$\text{steady flow } \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$



Then Navier-Stokes equation becomes

$$\text{Eq.(6.23): } -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} = 0$$

divergence of Eq(6.23) become [\[see the handwritten proof\]](#)

$$\text{Eq(6.25): } \quad \nabla^2 P = 0$$

From this Laplace equation, the solution should has the form

$$P(\mathbf{r}) = P_0 + \frac{c}{r} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots$$

The second term means the flow in the radial direction generates, so $c = 0$. Then we assume that

$$\text{Eq(6.26): } \quad P(\mathbf{r}) = P_0 + a\eta \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Here $\mathbf{V}$ is the flow vector and we assume

$$\mathbf{V} = (0, 0, V_z)$$

From Eq(6.26) and Eq(6.23) we can get [\[see the handwritten proof\]](#)

$$\begin{aligned}
\text{Eq(6.27)} \quad \nabla^2 v_x &= -aV_z \frac{3xz}{r^5} \\
\nabla^2 v_y &= -aV_z \frac{3yz}{r^5} \\
\nabla^2 v_z &= -aV_z \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)
\end{aligned}$$

If the velocity of the flow $\mathbf{v}$ is given by

$$\text{Eq(6.29)} \quad \mathbf{v} = \mathbf{V} \left(1 - \frac{3r_0}{4r} - \frac{r_0^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0^3}{r^3} \right)$$

then $\text{div } \mathbf{v} = 0$ and Eq(6.27) are satisfied when $a = -3r_0 / 2$. [see the handwritten proof]

vorticity $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{v}$ [see the handwritten proof]

The force from the sum of pressure [see the handwritten proof]

$$\begin{aligned}
\text{Eq.(6.30) [- should be added]} \quad \mathbf{F}_P &= - \int_{|\mathbf{r}|=r_0} dS \frac{\mathbf{r}}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta V_z \frac{z}{r^3} \right) \\
\text{Eq.(6.31)} \quad &= 2\pi\eta r_0 \mathbf{V} = 2\pi\eta r_0 V_z \mathbf{k}
\end{aligned}$$

viscous force

$$\text{Eq(6.32) [- should be +]} \quad (\mathbf{F}_V)_i = + \int_{|\mathbf{r}|=r_0} dS \left(F_{ix} \frac{x}{r} + F_{iy} \frac{y}{r} + F_{iz} \frac{z}{r} \right)$$

Eq(6.24) and

$$F_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad F_{ik} = F_{k,i}$$

We get [see the handwritten proof]

$$\mathbf{F}_V = 4\pi\eta r_0 \mathbf{V} = 4\pi\eta r_0 V_z \mathbf{k}$$

The total force becomes

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_V = 6\pi\eta r_0 V_z \mathbf{k}$$

6.4 Stokes 抵抗

1

$$(6.23) \quad -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad : \text{ベクトル量 の式}$$

$$i \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\nu = \eta / \rho$$

$$j \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$k \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\text{div}(\text{ベクトル}) = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\text{ベクトル}) \quad \leftarrow \text{内積}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^2 P + \nu \nabla^2 \underbrace{\text{div} \mathbf{v}}_0 = 0$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 P = 0} \quad (6.25)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.26)$$

P の 極座標

電磁場と同じ

P は定数, 電荷, 双極子..

$$P(r) = P_0 + \frac{C}{r} + \frac{q \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

定数 点電荷 双極子

半各方向に流 + 双極子 $C=0$

$$P(r) = P_0 + a \rho \nu \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla P = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(P_0 + a \rho \nu \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\nabla P \text{ の } i \text{ 成分} : a \rho \nu \left[\frac{v_x}{r^3} + \left(-\frac{3}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \left[\frac{1}{r^5} \right] (2x) \right] =$$

$$a \rho \nu \frac{r^2 v_x - 3x \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^5} = \frac{-3xz v_z}{r^5}$$

$$\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$$

$$\text{JPo. 1) : } \frac{(-\frac{3}{2}) V_z z (2z)}{r^5} = -9\rho V \frac{3yzV_z}{r^5}$$

$$\text{JPo. 2) : } \frac{V_z}{r^3} + \frac{(-\frac{3}{2}) V_z z (2z)}{r^5} = \frac{V_z}{r^3} - \frac{3z^2 V_z}{r^5}$$

(6.27) 式が 1/r^5 となる

$$r=r_0, \psi=0$$

$$\psi = \underbrace{\psi_z}_{\text{JPo. 2)}} \left(1 - \frac{3r_0}{4r} - \frac{r_0^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{(\psi \cdot r)}{r^2} \underbrace{r}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0^3}{r^3} \right)$$

$$\text{div } \psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{3}{4} \frac{V_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} x \left(\frac{r_0}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{r_0^3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{3}{4} \frac{V_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} y \left(\frac{r_0}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{r_0^3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[V_z \left(1 - \frac{3r_0}{4r} - \frac{r_0^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{V_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} z \left(\frac{r_0}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{r_0^3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\psi_x \text{ について, } \psi_x = -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z z x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3}{4} \frac{r_0^3 V_z z x}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}$$

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3}{4} r_0 V_z z x \left(-\frac{5}{2} \right) \left(-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}} \right) + \frac{3}{4} \frac{r_0^3 V_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z z}{r^5} + \frac{3}{4} \frac{3r_0 V_z z x^2 + r_0^3 V_z z}{r^7} - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 V_z z x^2}{r^7}$$

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial y} = -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z z}{r^5} + \frac{3}{4} \frac{3r_0 V_z z y^2 + r_0^3 V_z z}{r^7} - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 V_z z y^2}{r^7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_z}{\partial z} &= -V_z \frac{3}{4} \frac{(-\frac{1}{2}) 3r_0 \cdot 2z}{r^3} + V_z \frac{1}{4} \frac{(-\frac{3}{2}) r_0^3 (2z)}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{r_0 V_z (2z)}{r^3} - \frac{3}{4} r_0 V_z z^2 \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2z}{r^5} \\ &+ \frac{3}{4} \frac{r_0^3 V_z (2z)}{r^5} + \frac{3}{4} r_0^3 V_z z^2 \frac{(-\frac{5}{2}) 2z}{r^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{v} &= -\frac{3}{4} \frac{2r_0 v_z z}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{3r_0 v_z z (x^2 + y^2) + 2r_0^3 v_z z}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 v_z z (x^2 + y^2)}{r^7} \\
 &\quad + \frac{3}{4} \frac{r_0 v_z z}{r^3} - \frac{3}{4} \frac{2r_0 v_z z}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{v_z r_0^3 z}{r^5} + \frac{3}{4} \frac{3r_0 v_z z^3}{r^5} \\
 &\quad + \frac{3}{4} \frac{2r_0^3 v_z z}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 v_z z^3}{r^7} \\
 &= \frac{3}{4} \frac{r_0 v_z z}{r^3} (-2 + 1 - 2) + \frac{3}{4} \frac{3r_0 v_z z (x^2 + y^2 + z^2)}{r^5 r^3} \\
 &\quad + \frac{3}{4} \frac{r_0^3 v_z z}{r^5} (2 + 1 + 2) - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 v_z z (x^2 + y^2 + z^2)}{r^7 r^5} \\
 &= \frac{3}{4} \frac{r_0 v_z z}{r^3} (-2 + 1 - 2 + 3) + \frac{3}{4} \frac{r_0^3 v_z z}{r^5} (2 + 1 + 2 - 5) \\
 &= 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ in } \Sigma \cap \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 \mathcal{U}_x &= \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial z^2} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial x^2} &= -\frac{3}{4} \frac{r_0 v_z z}{r^3} \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{1}{r^5} (2x) + \frac{3}{4} \frac{6r_0 v_z z x}{r^5} + \frac{3}{4} (3r_0 v_z z x^2 + r_0^3 v_z z) \\
 &\quad \times \left(-\frac{5}{2}\right) \frac{1}{r^7} (2x) - \frac{3}{4} \frac{10r_0^3 v_z z x}{r^7} - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 v_z z x^2 \left(-\frac{7}{2}\right) 2x}{r^9} \\
 &= \frac{3}{4} \frac{r_0 v_z z x}{r^5} (3 + 6) + \frac{3}{4 r^7} (-15r_0 v_z z x^3 - 5r_0^3 v_z z x) - 10r_0^3 v_z z x \\
 &\quad + \frac{3}{4 r^9} 35r_0^3 v_z z x^3 \\
 &= \frac{3}{4} \frac{9r_0 v_z z x}{r^5} + \frac{3}{4 r^7} (-15r_0 v_z z x^3 - 15r_0^3 v_z z x) + \frac{3}{4 r^9} 35r_0^3 v_z z x^3 \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial y^2} &= -\frac{3}{4} \frac{r_0 v_z z x}{r^3} \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) 2y + \frac{3}{4} \frac{r_0^3 v_z z x}{r^5} \frac{\left(-\frac{5}{2}\right) 2y}{r^7} \\
 &= \frac{3}{4} \frac{3r_0 v_z z x y}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 v_z z x y}{r^7} \\
 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_x}{\partial y^2} &= \frac{3}{4} \frac{3r_0 v_z z x}{r^5} + \frac{3}{4} \frac{3r_0 v_z z x y}{r^5} \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2}\right) 2y - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 v_z z x}{r^7} - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 v_z z x y}{r^7} \\
 &\quad - \frac{1}{r^9} \left(-\frac{7}{2}\right) 2y \\
 &= \frac{3}{4} \frac{3r_0 v_z z x}{r^5} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-15r_0 v_z z x y^2 - 5r_0^3 v_z z x) - \frac{1}{r^9} \left(-\frac{7}{2}\right) 2y \\
 &\quad + \frac{3}{4 r^9} 35r_0^3 v_z z x y^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z x}{r^3} - \frac{3}{4} r_0 V_z z x \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) 2z + \frac{3}{4} \frac{r_0^3 V_z x}{r^5} + \frac{3}{4} r_0^3 V_z z x \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2}\right) 2z$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z x}{r^3} + \frac{3}{4 r^5} (3 r_0 V_z z^2 x + r_0^3 V_z x) - \frac{3}{4 r^7} (5 r_0^3 V_z z^2 x)$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = -\frac{3}{4} r_0 V_z x \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) 2z + \frac{3}{4 r^5} 6 r_0 V_z z x + \frac{3}{4} (3 r_0 V_z z^2 x + r_0^3 V_z x) \frac{1}{r^9}$$

$$\times \left(-\frac{5}{2}\right) 2z - \frac{3}{4 r^7} 10 r_0^3 V_z z^2 x - \frac{3}{4} 5 r_0^3 V_z z^2 x \frac{1}{r^9} \left(-\frac{7}{2}\right) 2z$$

$$= \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (3 r_0 V_z z^2 x + 6 r_0 V_z z x) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-15 r_0 V_z z^3 x - 5 r_0^3 V_z z x - 10 r_0^3 V_z z^2 x)$$

$$+ \frac{3}{4 r^9} 35 r_0^3 V_z z^3 x$$

$$\text{従って, } \nabla^2 V_x = \frac{3}{4 r^5} (9 r_0 V_z x z + 3 r_0 V_z z z + 9 r_0 V_z z z)$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-15 r_0 V_z z x^3 - 15 r_0^3 V_z z x$$

$$- 15 r_0 V_z z x y^2 - 5 r_0^3 V_z z x$$

$$- 15 r_0 V_z z x z^2 - 15 r_0^3 V_z z x)$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} (35 r_0^3 V_z z x^3 + 35 r_0^3 V_z z x y^2 + 35 r_0^3 V_z z x z^2)$$

$$= \frac{3}{4 r^5} 21 r_0 V_z x z - \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} 15 r_0 V_z z x (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} (-35) r_0^3 V_z z x$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} 35 r_0^3 V_z z x (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \frac{3}{4 r^5} r_0 (21 V_z z x - 15 V_z z x) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} r_0^3 V_z z x (-35 + 35)$$

$$= \frac{r_0 3}{4 r^5} 6 V_z z x = r_0 \frac{3}{2} V_z \frac{3 x z}{r^5}$$

$$\uparrow (6.27) \text{ の } \nabla^2 V_x = \frac{3}{2} r_0 V_z \frac{3 x z}{r^5}$$

で満たす。

よって、 $x \rightarrow y$ で (同) して、

$$\nabla^2 V_y = \frac{3}{2} r_0 V_z \frac{3 y z}{r^5} \uparrow$$

$$\nabla^2 V_z : \Rightarrow \nabla^2 V_z = \frac{3r_0}{2} V_z \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)$$

$$V_z = V_z \left(1 - \frac{3r_0}{4r} - \frac{r_0^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{V_z z^2}{r^2} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0^3}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial x} &= -\frac{3}{4} r_0 V_z \left(-\frac{1}{2} \right) 2x \frac{1}{r^3} - \frac{r_0^3 V_z}{4} \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2} \right) 2x - \frac{3}{4} r_0 V_z z^2 \left(-\frac{3}{2} \right) 2x \frac{1}{r^5} + \frac{3}{4} r_0^3 V_z z^2 \\ &\quad \times \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2} \right) 2x \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z x + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (r_0^3 V_z x + 3r_0 V_z z^2 x) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-5) r_0^3 V_z z^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} &= \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z + \frac{3}{4} r_0 V_z x \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2} \right) 2x + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (r_0^3 V_z + 3r_0 V_z z^2) \\ &\quad + \frac{3}{4} (r_0^3 V_z x + 3r_0 V_z z^2 x) \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2} \right) 2x - \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} 5r_0^3 V_z z^2 - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 V_z z^2 x}{\frac{1}{r^9} \left(-\frac{7}{2} \right) 2x} \\ &= \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (-3r_0 V_z x^2 + r_0^3 V_z + 3r_0 V_z z^2) \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-5r_0^3 V_z x^2 - 15r_0 V_z z^2 x^2 - 5r_0^3 V_z z^2) \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} 35r_0^3 V_z z^2 x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial y} &= -\frac{3}{4} r_0 V_z \frac{1}{r^3} \left(-\frac{1}{2} \right) 2y - \frac{r_0^3 V_z}{4} \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2} \right) 2y - \frac{3}{4} r_0 V_z z^2 \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2} \right) 2y \\ &\quad + \frac{3}{4} r_0^3 V_z z^2 \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2} \right) 2y. \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} r_0 V_z y \frac{1}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (r_0^3 V_z y + 3r_0 V_z z^2 y) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-5r_0^3 V_z z^2 y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} &= \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z + \frac{3}{4} r_0 V_z y \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2} \right) 2y + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (r_0^3 V_z + 3r_0 V_z z^2) \\ &\quad + \frac{3}{4} (r_0^3 V_z y + 3r_0 V_z z^2 y) \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2} \right) 2y - \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} 5r_0^3 V_z z^2 - \frac{3}{4} \frac{5r_0^3 V_z z^2 y}{\frac{1}{r^9} \left(-\frac{7}{2} \right) 2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (-3r_0 V_z y^2 + r_0^3 V_z + 3r_0 V_z z^2) \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-5r_0^3 V_z y^2 - 15r_0 V_z z^2 y^2 - 5r_0^3 V_z z^2) \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} 35r_0^3 V_z z^2 y^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{3}{4} r_0 V_z \frac{1}{r^3} \left(-\frac{1}{2}\right) 2z - \frac{1}{4} r_0^3 V_z \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) 2z - \frac{3}{4} V_z 2z \left(\frac{r_0}{r^3} - \frac{r_0^3}{r^5}\right)$$

$$- \frac{3}{4} V_z z^2 \left(\frac{r_0}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) 2z - \frac{r_0^3}{r^7} \left(-\frac{5}{2}\right) (2z)\right)$$

$$= \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} (r_0 V_z z - r_0 V_z 2z) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (r_0^3 V_z z + r_0^3 V_z 2z + 3r_0 V_z z^3) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} r_0^3 V_z z^3 (-5)$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z z + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (3r_0^3 V_z z + 3r_0 V_z z^3) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-5) r_0^3 V_z z^3$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = -\frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z - \frac{3}{4} r_0 V_z z \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) 2z + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (3r_0^3 V_z + 9r_0 V_z z^2)$$

$$+ \frac{3}{4} (3r_0^3 V_z z + 3r_0 V_z z^3) \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2}\right) 2z + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-15) r_0^3 V_z z^2$$

$$+ \frac{3}{4} (-5) r_0^3 V_z z^3 \frac{1}{r^9} \left(-\frac{7}{2}\right) 2z$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (3r_0 V_z z^2 + 3r_0^3 V_z + 9r_0 V_z z^2)$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-15 r_0^3 V_z z^2 - 15 r_0 V_z z^4 - 15 r_0^3 V_z z^2)$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} 35 r_0^3 V_z z^4$$

$$\nabla^2 V_z = \frac{3}{4} \frac{1}{r^3} r_0 V_z (1+1-1) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} \begin{pmatrix} -3r_0 V_z x^2 + r_0^3 V_z + 3r_0 V_z z^2 \\ -3r_0 V_z y^2 + r_0^3 V_z + 3r_0 V_z z^2 \\ + 9r_0 V_z z^2 + 3r_0^3 V_z + 3r_0 V_z z^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} \begin{pmatrix} -5r_0^3 V_z x^2 - 15r_0 V_z z^2 x^2 - 5r_0^3 V_z z^2 \\ -5r_0^3 V_z y^2 - 15r_0 V_z z^2 y^2 - 5r_0^3 V_z z^2 \\ -30r_0^3 V_z z^2 - 15r_0 V_z z^4 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{1}{r^9} (35r_0^3 V_z z^2 x^2 + 35r_0^3 V_z z^2 y^2 + 35r_0^3 V_z z^4)$$

従兄 (6.29) は (6.27) を満たす

$$a = -\frac{3}{2}b \quad \text{で 表す。}$$

温度は $W = kT$ で定義される。

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{W の } r \text{ 成分: } \frac{\partial V_y}{\partial x} &= -\frac{3}{4} r_0 V_z z y \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) (2x) \\ &\quad + \frac{3}{4} r_0^3 V_z z y \left(-\frac{5}{2}\right) 2x \frac{1}{r^7} = \frac{3}{4} \frac{r_0 V_z z y x}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{r_0^3 V_z z y x}{r^7} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{3}{4} \frac{r_0 V_z z x y}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5 r_0^3 V_z z x y}{r^7} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0$$

したがって r 成分は常に 0 $\square$

$$\begin{aligned} \text{W の } \theta \text{ 成分: } \frac{\partial V_z}{\partial y} &= \frac{3}{4} r_0 V_z y \frac{1}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (r_0^3 V_z y + 3 r_0 V_z z^2 y) + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-5 r_0^3 V_z z^2 y) \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{3}{4} r_0 V_z z \frac{1}{r^3} - \frac{3}{4} r_0 V_z z y \frac{1}{r^5} \left(-\frac{3}{2}\right) (2z) + \frac{3}{4} r_0^3 V_z y \frac{1}{r^5} \\ &\quad + \frac{3}{4} r_0^3 V_z z y \frac{1}{r^7} \left(-\frac{5}{2}\right) 2z \\ &= -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z y}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (3 r_0 V_z z^2 y + r_0^3 V_z y) - \frac{3}{4} \frac{5}{r^7} r_0^3 V_z z^2 y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{3}{2} \frac{r_0 V_z y}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \text{W の } \phi \text{ 成分: } \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{3}{4} \frac{r_0 V_z x}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (3 r_0 V_z z^2 x + r_0^3 V_z x) \\ &\quad - \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} 5 r_0^3 V_z z^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial x} &= \frac{3}{4} \frac{r_0 V_z x}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{r^5} (r_0^3 V_z x + 3 r_0 V_z z^2 x) \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{1}{r^7} (-5) r_0^3 V_z z^2 x \end{aligned}$$

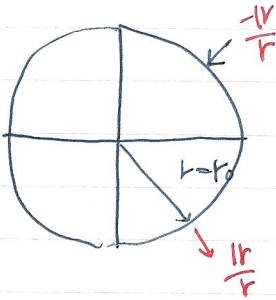
$$\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{3}{2} \frac{r_0 V_z x}{r^3}$$

次に

$$\text{W} = \text{rot } \text{V} = \hat{r} \left(\frac{3 r_0 V_z y}{2 r^3} \right) + \hat{\theta} \left(-\frac{3 r_0 V_z x}{2 r^3} \right)$$

z 成分は 0 $\square$

$$P(r) = P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta \frac{V_z z}{r^3}$$

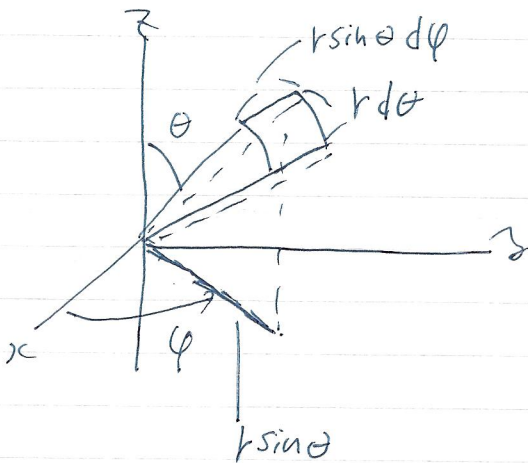


ある面積要素 ds がある, その法線方向の
単位ベクトル $\frac{r}{r}$ とすると

圧力は法線方向に ∇ 内向き
かかるので

$-\frac{1}{r} P(r)$ の力がかかっている。

座標系を極座標系にやる。



$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$$ds = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

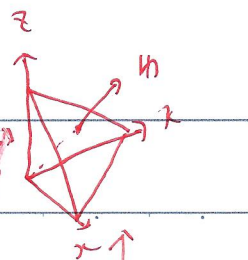
$$(F_P)_x = \int_{r=r_0} ds \frac{-x}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta V_z \frac{z}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2 \sin \theta}{r} \frac{-r \sin \theta \cos \varphi}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta V_z \frac{r \cos \theta}{r^3} \right) \\ &= \underbrace{P_0}_{\downarrow 0} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \theta \cos \varphi + \frac{3}{2} r_0 \eta V_z r_0 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F_P)_y &= \int_{r=r_0} ds \frac{-y}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta V_z \frac{z}{r^3} \right) \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \frac{-r \sin \theta \sin \varphi}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta V_z \frac{r \cos \theta}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$(F_P)_z = \int_{r=r_0} ds \frac{-z}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta V_z \frac{z}{r^3} \right) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \frac{-r \cos \theta}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} r_0 \eta V_z \frac{r \cos \theta}{r^3} \right)$$

$$\begin{bmatrix} F_{ux} \\ F_{uy} \\ F_{uz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$



$$= -r_0^2 P_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta + \frac{3}{2} r_0^4 V_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$X = \cos \theta$$
$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$$
$$\theta = 0 \quad x = 1$$
$$\theta = \pi \quad x = -1$$

$$\text{第1项} = -2\pi r_0^2 \rho_0 \int_{-1}^1 (-x) dx = -2\pi r_0^2 \rho_0 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = 0$$

$$\text{第 2 项} = +\frac{3}{2} r_0 k V_z (2\pi) \int_1^{-1} (-dx) x^2 = +\frac{3}{2} r_0 k V_z 2\pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1$$

$$= +3 \times 10^4 \text{ V}_2 \cdot \pi \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$= +2\pi r_0 k V_z$$

$$\text{Ex 1} = \boxed{H_p = 2\pi r_0 h V_z \frac{h}{k}}$$

c. 723

$$(\mathbb{F}_V)_x = + \int_{t=t_0} ds \left(F_{xx} \frac{x}{r} + F_{xy} \frac{y}{r} + F_{xz} \frac{z}{r} \right)$$

ある (x, y, z) にはある
 $\{S\}$ には必ず枯性力

$$\frac{x}{r} F_{xx} = 2h \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{x}{r} = 2h \left[-\frac{3}{4} \frac{h_0 V_z}{r^3} z + \frac{3}{4} \frac{3h_0 V_z z x^2 + h_0^3 V_z z}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5h_0^3 V_z z x^2}{r^7} \right] \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} F_{xy} = \hbar \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 2\hbar \left[+\frac{3}{4} \frac{3\hbar\omega/2 z^2 y}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5\hbar^3\omega/2 z^2 x y}{r^7} \right] \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{z}{r} F_{xz} = \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 2\eta \left[\frac{3}{4} \frac{3k_0 k_z z^2 x + k_0^3 k_z x}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5k_0^3 k_z z^2 x}{r^7} \right] \frac{z}{r}$$

1. $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x = y \in \mathbb{Z}$ 1次の項は $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$ (ベクトル)

$$x^3 \text{ auf } \mathbb{R} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}) \quad \text{ und } dy$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi = 0 \quad \text{ und } d\varphi_0$$

$$x y^2 \text{ on } \mathbb{Q} \text{ is } \left(\frac{1}{2}\right)^3 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^2 = \frac{1}{8}(e^{3i\varphi} - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi})$$

$$\vec{F}_n = \vec{F}_i$$

従って,

$$(\vec{F}_V)_x = 0 \quad \text{で済ぶ}$$

$$(\vec{F}_V)_y = + \int_{r=r_0} ds \left(F_{yx} \frac{x}{r} + F_{yy} \frac{y}{r} + F_{yz} \frac{z}{r} \right)$$

$$\frac{x}{r} F_{yx} = h \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \frac{x}{r} = 2h \left[\frac{3}{4} \frac{3h_0 V_z z}{r^5} xy - \frac{3}{4} \frac{5h_0^3 V_z z}{r^7} xy \right] \frac{x}{r}$$

$$\frac{y}{r} F_{yy} = 2h \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{y}{r} = 2h \left[-\frac{3}{4} \frac{h_0 V_z z}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{3h_0 V_z z y^2 + h_0^3 V_z z}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5h_0^3 V_z z y^2}{r^7} \right] \frac{y}{r}$$

$$\frac{z}{r} F_{yz} = h \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \frac{z}{r} = 2h \left[\frac{3}{4} \frac{h_0^3 V_z y + 3h_0 V_z z y}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5h_0^3 V_z z y}{r^7} \right] \frac{z}{r}$$

$$y \text{ かつ } \sin \varphi \text{ なら } y \text{ の } 1 \text{ 次の項 } \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi = 0$$

$$y^3 \text{ かつ } \sin^3 \varphi \notin \text{BCC} \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = 0$$

$$x^2 y \text{ かつ } \cos \varphi \sin^2 \varphi \notin \text{BCC} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = 0$$

従って, $(\vec{F}_V)_y = 0$ で済ぶ

$$(\vec{F}_V)_z = + \int_{r=r_0} ds \left(F_{zx} \frac{x}{r} + F_{zy} \frac{y}{r} + F_{zz} \frac{z}{r} \right)$$

$$\frac{x}{r} F_{zx} = 2h \left[\frac{3}{4} \frac{3h_0 V_z z^2 x + h_0^3 V_z x}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5h_0^3 V_z z^2 x}{r^7} \right] \frac{x}{r}$$

$$\frac{y}{r} F_{zy} = 2h \left[\frac{3}{4} \frac{h_0^3 V_z y + 3h_0 V_z z^2 y}{r^5} - \frac{3}{4} \frac{5h_0^3 V_z z^2 y}{r^7} \right] \frac{y}{r}$$

$$\frac{z}{r} F_{zz} = 2h \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{z}{r} = 2h \left[-\frac{3}{4} \frac{h_0 V_z z}{r^3} + \frac{3}{4} \frac{3h_0^3 V_z z + 3h_0 V_z z^3}{r^5} + \frac{3}{4} \frac{(-5)h_0^3 V_z z^3}{r^7} \right] \frac{z}{r}$$

$$(F_{zx} \frac{x}{r} + F_{zy} \frac{y}{r} + F_{zz} \frac{z}{r}) = 2h \frac{3}{4} \left[-\frac{h_0 V_z z^2}{r^4} + \frac{3h_0 V_z z^2 (x^2 + y^2 + z^2) + h_0^3 V_z (x^2 + y^2 + z^2)}{r^6} \right.$$

$$\left. + \frac{2h_0^3 V_z z^2}{r^6} - \frac{5h_0^3 V_z z^2 (x^2 + y^2 + z^2)}{r^8} \right]$$

$$= \frac{3}{2} h \left[-\frac{h_0 V_z z^2}{r^4} + \frac{3h_0 V_z z^2 + h_0^3 V_z}{r^4} + \frac{2h_0^3 V_z z^2}{r^6} - \frac{5h_0^3 V_z z^2}{r^6} \right]$$

$$= \frac{3}{2} h \left[\frac{2h_0 V_z z^2 + h_0^3 V_z}{r^4} - \frac{3h_0^3 V_z z^2}{r^6} \right]$$

$$\begin{aligned}
 + \int_{r=r_0} dS \left(\frac{1}{r^2} \right) &= + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \, r^2 \sin\theta \, \frac{3}{2} \eta \left[\frac{2r_0 V_z}{r^4} r^2 \cos\theta + \frac{r_0^3 V_z}{r^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3r_0^3 V_z}{r^6} r^2 \cos^2\theta \right] \\
 &= + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \, \frac{3}{2} \eta \left[r_0 V_z \sin\theta \cos\theta + \frac{r_0^3}{r^2} V_z \sin\theta - \frac{3r_0^3 V_z}{r^2} \sin\theta \cos^2\theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left[\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta \Big|_0^\pi = -[-1-1] = 2 \right. \\
 &\quad \left. r \rightarrow r_0 \right. \\
 &\int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta \Rightarrow \cos\theta = x \quad \begin{array}{l} \theta=0 \quad \cos\theta=1 \\ \theta=\pi \quad \cos\theta=-1 \end{array} \\
 &\quad \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \\
 &= \int_1^{-1} (-dx) x^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \\
 &\quad = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$= + 2\pi \frac{3}{2} \eta \left[2r_0 V_z \frac{2}{3} + r_0 V_z 2 - 3r_0 V_z \frac{2}{3} \right]$$

$$= + 3\pi \eta r_0 V_z \frac{4+6-4}{3} = + 4\pi \eta r_0 V_z$$

$$\therefore \boxed{\bar{H}_V = 4\pi \eta r_0 V_z \tau_R}$$

total τ''

$$\boxed{\bar{H} = \bar{H}_p + \bar{H}_V = 6\pi \eta r_0 V_z \tau_R}$$

α が 0 球に傾く

戸田盛和・中嶋貞雄 編

物理入門コース

8

弾性体と流体

恒藤敏彦 著

岩波書店

$$f_k = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} A l e^{-k^{1/2}l/4}$$

となる。この f_k は $|k| > 2/l$ になると急激に小さくなることに注意しよう (他の例は問題 2)。この例からわかるように一般に f_k は波束のひろがりのていどを l としたとき、 $|k| \gg 1/l$ になると 0 に近づく。したがってうなりの場合にやったように (5.105) で指数関数の位相を

$$k'x - \omega_{k'}t \cong kx - \omega_k t + (k' - k) \left[x - \left(\frac{d\omega_k}{dk} \right)_k t \right]$$

と近似することができる。そうすると (5.105) は

$$\begin{aligned} u(x, t) &\cong \exp[i(kx - \omega_k t)] \int_{-\infty}^{\infty} dk' f_{k'-k} \exp[i(k' - k)(x - c_k t)] \\ &= \exp[i(kx - \omega_k t)] f(x - c_k t) \end{aligned} \quad (5.106)$$

となる。これは波束が群速度 c_k で進むことを意味している。

うなりの場合と同様に、位相速度が群速度より大きい水の重力波の波束では、後端から山や谷が現われて先端で消えて行く。表面張力波では逆であり、音波のような場合では同じ山や谷が波束の中にとどまって進行する。

なお (5.105) の近似で k の高次の項まで残すと、波束の形も時間とともに変化する (一般には広がる) ことを注意しておこう。

問 題

1. 波長 1 m と 10 m の深い水の表面波の群速度を求めよ。
2. $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

と与えられているとき、フーリエ変換を求めよ。



6

粘性流体の流れ

水のような現実の流体がパイプの中を流れるとき、水とパイプの壁との間には摩擦力がはたらく。同様に水の要素の間にも摩擦力がはたらく。流体の場合には摩擦力のことを粘性力とよぶ。粘性力があると、完全流体の流れには見られなかった運動が現われる。まず粘性力とはどんな力であるかを調べよう。

6-1 粘性力

もともと流体とは、体積の変化をともしない変形を自由に行なうものであると考えた。しかし流れのように変形が有限の速度で進行するときには現実の流体は抵抗を示す。2枚の平行な板の間に流体があって一方をある速度で動かすと、流体は図6-1のような変形を続けるが、このときには板は流体から力を受ける(6-2節)。粘りのある油や蜂蜜のような液体ではこの力はとくに大きい。上の板に力を加えて動かしているとき、下の板を固定しておくにはもちろん逆向きの力を必要とする。ということは、流体の中でどこでも上の層の流体は下の流体を引きずろうとする力(そしてその逆)を及ぼしているに違いない。このような粘性力(viscous force)がはたらく性質を粘性(viscosity)といい、粘性をもつ流体を粘性流体(viscous fluid)とよぶ。

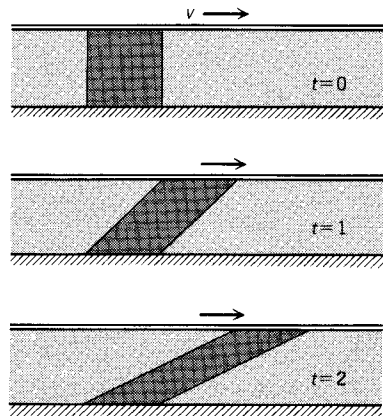


図6-1 下の板を固定し、上の板を動かすと、間にはさまれた流体は変形する。

完全流体とは流れがあっても流体要素の間には圧力だけしかはたらかない流体であった。それでは粘性力はどうして生じるのだろうか。気体の場合にこの問題を考えてみよう。上の例のような流れのとき、図6-2のように隣接する気体の微小な要素1,2に注目すると、両者はすこし異なった速度で運動している。微視的に見ると気体の分子はたがいに衝突しながら乱雑な運動をしており、も

ちろん要素1と2の間にわれわれが勝手に考えた境界を通して出入りしている。そのさい1から2へ入る分子の x 方向の速度の平均値は2から1へ入る分子のそれよりもすこし大きいであろう(流れがなければ平均値は0である)。したがって、個々の分子は乱雑な運動をしているが、平均として1から2へいく分子の運ぶ x 方向の運動量は、2から1へ移る運動量よりも大きい。ということは差し引き1から2へ x 方向の運動量に移る、つまり1は2へ x 方向に引きずる力を及ぼしているということになる。気体運動論では粘性力をこのメカニズムによって微視的に求めるのである。また密度の大きな液体では分子間の力も粘性力の原因になる。ここではこうして生じる粘性力が巨視的なスケールで見るとどのような性質の力であるかという問題に注目しよう。

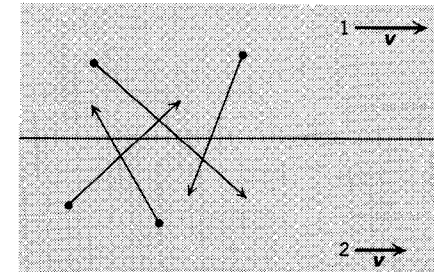


図6-2 隣接している気体の要素の間の運動量のやりとり。

x 方向の流れ $v_x(z)$ があるとき、 z 軸に垂直な微小な面 $dx dy$ を通して上の流体が下の流体に及ぼす力を考察しよう。圧力は面に垂直方向、すなわち z 方向であったが、こんどは x 方向の力に注目する(図6-3)。圧力と同様にこの力も面の面積に比例するから

$$F_{xz} dx dy$$

と表わそう。 F_{xz} は z 軸に垂直な単位面積にはたらく x 方向の力である。ニュートンはこの力が流体の速度の勾配、すなわち $\partial v_x / \partial z$ に比例すると考えた。すなわち

$$F_{xz} \propto \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (6.1)$$

この仮定は上に述べたことから考えても自然である。一様な流れではどんなに速度が大きいても粘性力ははたらかないこと、上下の流体のすべりが大きければそれだけ粘性力は大きいということにかなっている。

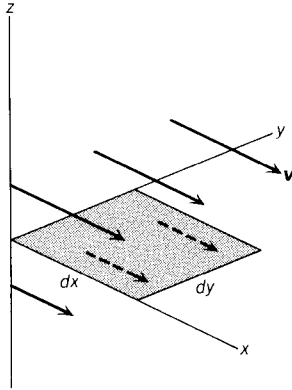


図 6-3

ニュートンの仮定(6.1)を一般の流れの場合に拡張しよう。まず第1に流体が等方的(isotropic)、すなわち流体の性質としてはどの方向も区別がないということを考えて、粘性力と速度の勾配との関係はそれがどの方向に生じても同じはずである。いいかえると座標軸さえとりかえれば $F_{xz} \propto \partial v_x / \partial z$ は、たとえば $F_{yx} \propto \partial v_y / \partial x$ になる。したがって

$$F_{ik} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (6.2)$$

とおけばよさそうである。添字 i, k は x, y, z のどれでもよい。 η は比例定数。はたしてこの形は正しいであろうか？ 粘性力は流体の要素の間に相対的な運動があった場合にはたらくはずである。互いの位置の関係が変化しない運動としてはすでにふれた一様な流れがあるが、もう1つ全体としての回転、すなわち剛体回転がある。3-4節の例題1によると、 z 軸を回転軸にして角速度 Ω で剛体回転しているときの速度場は

$$\mathbf{v} = (-\Omega y, \Omega x, 0) \quad (6.3)$$

である。このとき(6.2)によると xy 成分は

$$F_{xy} = -\eta \Omega$$

となって粘性力がはたらくことになってしまう。したがって(6.2)は粘性力の式として正しい形をしていないのである。(6.3)の速度場では $\partial v_x / \partial y = -\Omega$, $\partial v_y / \partial x = \Omega$ であるから

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

という形であれば0になる。それでは

$$F_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (6.4)$$

と仮定してみよう。任意の軸のまわりの剛体回転に対して

$$\partial v_i / \partial x_k = -\partial v_k / \partial x_i$$

であるから(問題1)、(6.4)の形はたんなる剛体回転ではいつも0になる。

粘性力の式(6.4)が正しいとすると、始めにあげた例の場合に x 軸に垂直な面にはたらく z 方向の力もはたらいっていることになる。板の間隔を h とし、上の板を速度 v で動かしたときの流れは(3-7節)

$$v_x = vz/h, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0 \quad (6.5)$$

であるから、

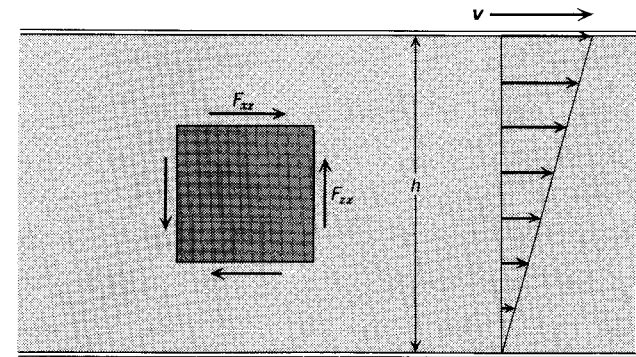


図 6-4 流体の中に立方体を考える。この場合も下の板は固定し、上の板を速度 v で動かす。

$$\begin{aligned} F_{xz} &= \eta (\partial v_x / \partial z + \partial v_z / \partial x) = \eta (v/h) \\ F_{zx} &= \eta (\partial v_z / \partial x + \partial v_x / \partial z) \end{aligned}$$

$$F_{xz} = F_{zx} = \eta v/h \quad (6.6)$$

である。したがって単位体積の立方体を図 6-4 のようにとると、 z および x に垂直な面には矢印のように等しい大きさの力がはたらくことになる。実際、そうでなくてはならない。上の板に x 方向の力を加え、下の板に（動かないように） $-x$ 方向の力を加えただけでは、偶力を加えたことになり全体が回りだしてしまう。回りださないためには上下の板に z 方向の力を加えていなければならない。力は流体のなかを伝達されるから、流体中の要素にも、それが回りださないように、図のように力がはたらいっているはずである。

(6.4) 式が正しいとすると、 F_{xx} , F_{zz} という面に垂直にはたらく力も 0 でなく、しかも F_{xz} などと同じ比例係数をもっている。これはおかしいのではないかという疑問がでるかもしれない。しかし座標軸はわれわれが勝手に選んだものであることを忘れてはならない。上の例で 45° 回転した座標系 $\bar{x}$, $\bar{z}$ をとってみよう (xz 面だけで考えれば充分である) :

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z), \quad \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+z)$$

速度もベクトルであるから同じ変換をする :

$$v_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x + v_z), \quad v_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-v_x + v_z)$$

したがって (6.5) を代入すると $v_{\bar{x}} = -v_{\bar{z}} = v_z/\sqrt{2}$, z を $\bar{x}$, $\bar{z}$ で表わすと

$$v_{\bar{x}} = -v_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{v}{h} (\bar{x} + \bar{z})$$

となる。したがって新しい座標系では

$$F_{\bar{x}\bar{x}} = \eta \frac{v}{h}, \quad F_{\bar{z}\bar{z}} = -\eta \frac{v}{h}, \quad F_{\bar{x}\bar{z}} = F_{\bar{z}\bar{x}} = 0 \quad (6.7)$$

であり、こんどは添字のそろった成分、つまり面に垂直な方しか現われない。しかしこれは当然期待されるべき結果である。図 6-5 のように、 $F_{\bar{z}\bar{z}}$ は 2 等辺 3 角形の底辺にはたらく力であるが、これは 2 辺にはたらく力の合力のほずである。辺の長さや角度を考えると、その大きさは

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot F_{xz} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot F_{zx} = \eta \frac{v}{h}$$

である。同様にして (6.7) の $F_{\bar{x}\bar{x}}$ も得られる。圧力とちがって $F_{\bar{z}\bar{z}}$ と $F_{\bar{x}\bar{x}}$ とは符号が反対であることに注意しよう。

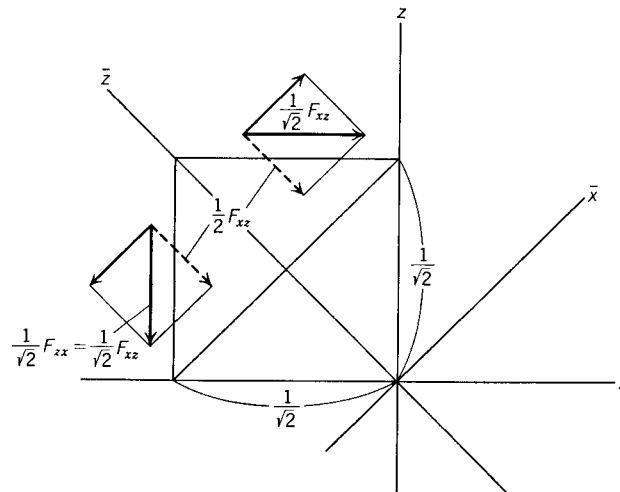


図 6-5

粘性力の式 (6.4) は、実は、縮まない流体の場合に正しい式であって、密度の時間変化があるときにはそれに関する項がつけ加わる。微小な流体要素の体積が変化する割合は $\text{div } \mathbf{v}$ に比例するから (3-3 節の例題 1 参照)、この項は $\zeta(\text{div } \mathbf{v})\delta_{ik}$ という形で与えられる。 ζ は (6.4) の η とは異なる係数である。しかし以下では縮まない粘性流体の流れに話を限るから、粘性力としては (6.4) だけを考えることにする。

粘性力をきめる係数 η は粘性率あるいは粘性係数とよばれ、個々の流体によって異なる値をもつ。 η の単位は MKS 単位系では $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$, CGS 単位系では $\text{dyn}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$ でポアズ (poise, P) とよばれる ($1 \text{ ポアズ} = 0.1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$)。次の節でわかるように、 η のかわりに

$$\nu \equiv \eta/\rho$$

という定数を導入すると便利である。 ν は動粘性率とよばれることもある。 ν

表 6-1 粘性率

物質	ν (10^{-6} m ² /s)	η (10^{-3} N·s/m ²)
空気 (0°C)	13.22	0.0171
(20°C)	15.01	0.0181
水素 (20°C)	105.0	0.0088
水 (0°C)	1.792	1.79
(20°C)	1.004	1.00
グリセリン	1183	1495

の単位は m²/s である (CGS では cm²/s でストークスとよばれる)。表 6-1 にいろいろな流体の粘性率が与えてある。

問 題

1. 任意の軸のまわりの剛体回転に対して (6.4) が 0 になることを示せ。

6-2 ナヴィエ-ストークス方程式

粘性力があると流体の運動方程式であるオイラーの方程式に粘性力の項がつけ加わる。辺が dx, dy, dz の直方体の微小要素にはたらく粘性力は、その各面にはたらく前節で求めた力の合力である。たとえば x 成分を求めてみよう：

$$\begin{aligned}
 & [F_{xx}(x+dx, y, z) - F_{xx}(x, y, z)] dydz \\
 & + [F_{xy}(x, y+dy, z) - F_{xy}(x, y, z)] dx dz \\
 & + [F_{xz}(x, y, z+dz) - F_{xz}(x, y, z)] dx dy \\
 & \cong \left\{ \frac{\partial F_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial F_{xz}}{\partial z} \right\} dV \equiv \frac{\partial F_{xk}}{\partial x_k} dV
 \end{aligned}$$

この章ではベクトル $\mathbf{r}$ の任意の成分 x, y, z を表わすとき x_i と書く。また、最後の形のように、同じ添字 k が対になって現われるときには $k=x, y, z$ について和をとると約束する。したがって単位体積にはたらく粘性力の i 成分は

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \eta \left(\nabla^2 v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \mathbf{v} \right) \quad (6.8)$$

となる。ここでは縮まない流体の場合だけを考えるから $\text{div } \mathbf{v}$ の項は省略する。

オイラー方程式 (3.23) の左辺は単位体積の流体の慣性力であり、右辺はそれにはたらく力であった。いまの場合、上に求めた粘性力 $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$ が余分につけ加わることになる。したがって求める方程式は

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad \left. \begin{array}{l} \text{3 components} \\ \text{4 unknowns} \\ : P, v_i \end{array} \right\}$$

である。たとえば x 成分に対する式は

$$\begin{aligned}
 & \rho \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x \right\} \\
 & = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x + \rho f_x
 \end{aligned}$$

これが縮まない粘性流体の運動方程式でナヴィエ-ストークス方程式 (Navier-Stokes Equation) とよばれる。以下でこれを使うときは両辺を ρ でわった形

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (6.9)$$

が便利である。ここで $\nu = \eta/\rho$ は前節の終りに導入した動粘性率である。

3-5 節の運動量保存則に出てきた運動量の流れのテンソル Π_{ik} ((3.33)) の意味、すなわち k 軸に垂直な面を通して単位時間に流れる運動量 (あるいは面にはたらく力) の i 成分という意味から、粘性流体では F_{ik} がつけ加わる。したがって

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \delta_{ik} P - \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (6.10)$$

(3.34) にこれを代入し、連続の方程式を使うと、ナヴィエ-ストークスの方程式になる (外力があるときには (3.33) の左辺が $\mathbf{f}$ に等しい)。

粘性力の加わった運動方程式 (6.9) に従う流体の流れには完全流体の流れとは定性的に異なる点がある。その 1 つは粘性があると流れの運動エネルギーの散逸、すなわち熱エネルギーへの転換が生じ、運動の減衰が起こることである。この点についてはあとで議論しよう。もう 1 つ重要な点は、循環が保存されるというケルヴィンの定理がもはや成り立たなくなることである。外力が保存力でポテンシャル U で与えられるとすると、いまは縮まない流体としているか

ら, (6.9)は(3.50)に対応する形

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} P + U \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.11)$$

に書くことができるが, 粘性力の項はグラジエントの形にすることはできない。そのために3-8節のケルヴィンの渦定理の証明は最後のところで行きづまってしまう。したがってこれから具体例で見るように粘性流体の中では渦の生成消滅, 成長と減衰が起こり, 渦なし流とみなせるのは特別な場合だけなのである。

縮まない粘性流体の運動は, 連続の方程式 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ とナヴィエ-ストークスの方程式(6.9)を連立させて取り扱うことになる。そのさい必要になる固体の表面での境界条件であるが, 流体の分子は固体の表面と衝突したり, また分子間力によって吸着されては離れるという過程をくり返している。したがって固体表面で流体と固体の速度は等しいと考えるのが妥当である。表面についたものがなかなか流れおちないのは日常経験する事実である。完全流体では速度の法線方向の成分だけが等しければよかったことを思い出そう。それに対し粘性流体での境界条件は物体表面の速度を $\mathbf{u}$ とすると, 表面で

$$\text{境界条件: } \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad (6.12)$$

でなければならない。静止している物体があればもちろんその表面で $\mathbf{v} = 0$ となる。

エネルギーの散逸 上に述べたように粘性力があると流れの運動エネルギーが熱エネルギーに転換される。縮まない流体を考えているから密度の変化にともなう流体の内部エネルギーの変化は考えなくてよい。流れの運動エネルギーの密度は $(1/2)\rho \mathbf{v}^2$ であるから, この時間変化を調べてみよう。時間微分をとり, ナヴィエ-ストークスの方程式を使うと

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) = \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho v_i \left\{ -(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\}$$

となる。ただし外力はないとし, 粘性力の項は F_{ik} を使って書いた。 $\text{div } \mathbf{v} = \partial v_i / \partial x_i = 0$ によって右辺を変形し, 3-6節でやったようにできるだけ発散の形にまとめるようにすると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ v_k \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + v_k P - v_i F_{ik} \right\} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} F_{ik} \quad (6.13)$$

となる(問題1)。これは(3.39)に相当しているが(縮まない流体としているから $\rho \varepsilon$ の変化は考えなくてもよい), 粘性力による付加項が現われている。もし最後の項がなければ $\{ \}$ の中はエネルギーの流れの密度であり, (6.13)は保存則の形をしている。最後の項は F_{ik} の形を代入すると

$$-\rho \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{2} \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

と書きなおされる。この項は粘性力による流れのエネルギーの減衰を与える項で, 定符号の形をしているから粘性率 ν は必ず正の値でなければならない。

エネルギーの収支を理解しやすくするために, (6.13)式をある体積 V にわたって積分しよう。そうすると発散の項はガウスの定理によって V をかこむ面およびそのなかにある物体表面にわたる表面積分となる:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV &= \int_S \left\{ v_k \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + v_k P - v_i F_{ik} \right\} dS_k \\ &\quad - \int \frac{\partial v_i}{\partial x_k} F_{ik} dV \end{aligned} \quad (6.14)$$

(S が物体表面であれば境界条件から $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ は物体表面の速度) でなければならない。) ここでは法線をいつも表面から流体内部に向う方向にとる。表面積分のなかの第3項は, 物体が粘性のため流体を引っばることにより流体とやりとりする単位時間あたりのエネルギーであり, 右辺の体積分は流体のなかで粘性によって熱に散逸する単位時間あたりのエネルギーである。これらの意味は以下具体例の考察で明らかにしよう。流体のなかで熱の発生があるから粘性流体の流れは一般に可逆過程ではなく, エントロピーの増加をとまなう。しかしここではそれによる温度変化は小さく, 流体の性質は変わらないものとする。

問 題

1. (6.13)を証明せよ。

6-3 定常流の簡単な例

粘性流体の定常流のなかで簡単に扱うことのできる例を2つ3つ取り上げよう。これらの例で取り扱いが簡単になる理由は、問題の幾何学的な性質からナビエ-ストークス方程式の非線形項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ が消えることである。

(i) 平行板の間の流れ

xy 面に平行な無限に広い板が $z=0$ と $z=h$ にあり、その間に粘性流体がある。流れはどこでも x 方向とする: $\mathbf{v}=(v_x, 0, 0)$ 。

a) 上の板が動く場合 これは6-1節で考えた例であるが、ナビエ-ストークスの方程式を解くという立場から見なおしてみよう。境界条件は

$$v_x = 0 \quad (z=0), \quad v_x = u \quad (z=h) \quad (6.15)$$

である。問題の設定から v_x は z だけに依存する。したがって連続の方程式は自動的にみたされる $(\partial v_x(z)/\partial x=0)$ 。ナビエ-ストークスの方程式は、 $\mathbf{v}$ が時間によらず(定常流を考えている)、また $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = v_x \partial v_x(z)/\partial x = 0$ であり、また圧力も x によらないから、たんに

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0 \quad (x \text{ 成分}), \quad \frac{dP}{dz} = 0 \quad (z \text{ 成分}) \quad (6.16)$$

となる(y 方向にはすべてが一様であるとしているから、以下 xz 面で考える)。ただし重力などはないとした。したがって圧力は一定であり、また境界条件(6.15)をみたす上の式の解として、すでに6-1節で使った結果(6.5) $v_x = uz/h$ が得られる。

上の板をいつも速度 u で動かすには仕事をしなければならない。板にはたらく粘性力は単位面積あたり

$$F_{xz} = \eta \partial v_x / \partial z = \eta u / h$$

の大きさである((6.6)式参照)。したがって必要な仕事は単位面積あたり単位時間に

$$W = \eta u^2 / h$$

である。これはちょうど(6.14)の表面積分の第3項から得られる値である。また(6.14)の散逸項の大きさは単位体積あたり $\rho \nu u^2 / h^2$ に等しい(問題1)。すなわちこれだけの熱が流体のなかで発生する。

b) 圧力差による流れ 上下の板が固定されているとき、一定の流量の流れがあるとする。境界条件は、こんどは

$$v_x(0) = v_x(h) = 0 \quad (6.17)$$

となる。粘性力に対抗する圧力差があって流れが保たれているから、圧力は x の関数である。したがってナビエ-ストークスの方程式は

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dz^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (6.18)$$

となる。第2の式から P は x だけの関数であることがわかり、第1の方程式の第1項は x によらない(速度場は x 方向には変化しない)から、 dP/dx は定数のはずである。したがって第1の式は積分定数を C, C' とすると

$$v_x = \frac{1}{2\nu\rho} \frac{dP}{dx} z^2 + Cz + C'$$

と積分される。境界条件(6.17)から $C'=0$, $C = -(h/2\nu\rho) dP/dx$ と定まり、解は

$$v_x = \frac{1}{2\nu\rho} \frac{dP}{dx} (z-h)z \quad (6.19)$$

という形になる。圧力の勾配 dP/dx は流量によって定められる。 y 方向に単位長さの断面を通して単位時間に流れる流体の質量を J とすると

$$J = \rho \int_0^h v_x dz = -\frac{h^3}{12\nu} \frac{dP}{dx}$$

であるから、結局

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{12\nu}{h^3} J, \quad v_x = \frac{6J}{\rho h^3} (h-z)z \quad (6.20)$$

という結果が得られる。流れは図6-6のようになる。一定量の流れを保つのに要する圧力差が粘性率に比例し、間隔の3乗に逆比例すること、速度場は粘性率によらないことに注意しよう。

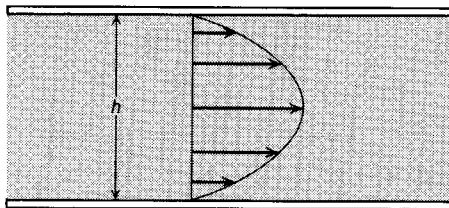


図 6-6 圧力差による流れ. 上の板は固定してある.

(ii) パイプの中の流れ

(i)項の b)と同じ種類の問題であるが, こんどは半径 a の長いパイプの中での定常流を考える. パイプの軸を z 軸にとり, 円柱座標を使うと, 問題の性質から速度場は z 成分 v_z だけがあり, しかも r だけの関数である. 上の例と同様, 圧力勾配 dP/dz は一定であるから, ナヴィエ-ストークス方程式の z 成分は

$$\nu \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) v_z - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = 0$$

となる. 境界条件 $v_z(a)=0$ をみたす解は

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\rho\nu} \frac{dP}{dz} (a^2 - r^2) \quad (6.21)$$

である. 流量を J とすると

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{8\nu J}{\pi a^4} \quad (6.22)$$

となる. この流れはハーゲン-ポアズイユの流れ (Hagen-Poiseuille's flow) とよばれる. 彼らは 19 世紀の半ばころ, 独立に細い管中の水流の実験をおこない, 圧力差が流量に比例し, 管の半径の 4 乗に逆比例することを観測した.

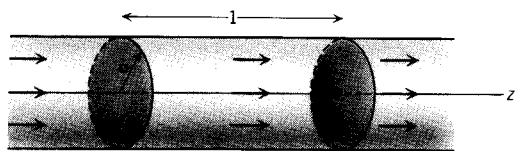


図 6-7 パイプのなかを流れる流体. 2つの断面の距離を単位長さにとって考える.

ハーゲン-ポアズイユ流の場合にエネルギーの収支を調べてみよう. パイプの単位長さのなかにある流体に対して (6.14) をあてはめよう (図 6-7). 左辺は定常流であるから 0 である. 右辺の表面積分のうちパイプの内壁にわたる部分は, パイプが静止しているから 0 である. 2つの断面からの寄与は圧力の項だけからくる. 単位長さあたりの圧力差は勾配一定であるから dP/dz に等しく v_z は z によらないから, (6.21, 22) を (6.14) に代入すると

$$\int_s v_k P dS_k = \frac{1}{4\rho\nu} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 2\pi \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \frac{\pi a^4}{8\rho\nu} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2$$

となる. 一方 (6.14) の最後の散逸項は

$$-\rho\nu \int \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 dV = -\rho\nu \cdot 2\pi \left(\frac{1}{2\rho\nu} \frac{dP}{dz} \right)^2 \int_0^a r^2 r dr = -\frac{\pi a^4}{8\rho\nu} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2$$

となって (6.14) がたしかに成り立っていることがわかる. 実際にはパイプの両

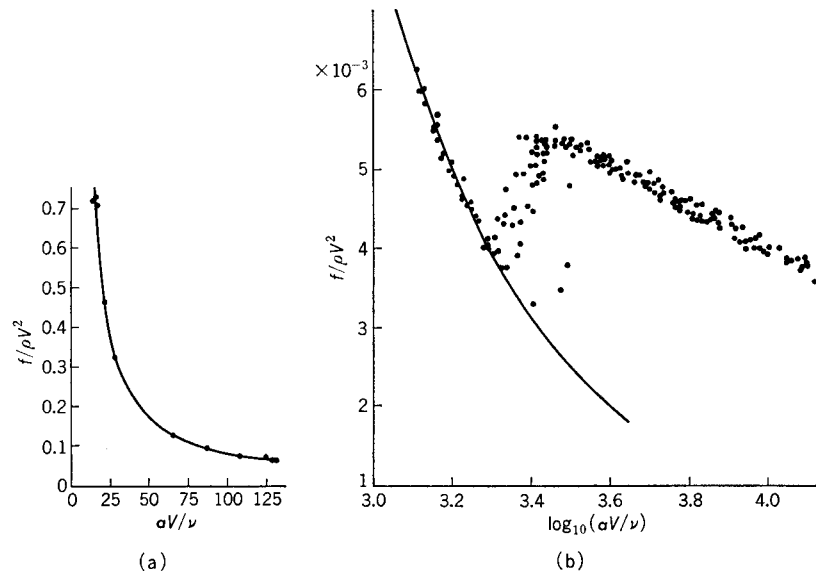


図 6-8 ポアズイユ流の検証. (a) 半径 5 cm の管に粘性の大きな油を流したデータ. (b) 直径 1.26, 0.71, 0.36 cm のパイプ中を水および空気を流して得たデータ. 縦軸は単位面積あたりの粘性力を ρV^2 でわった値. 横軸は aV/ν (レイノルズ数, 6-8 節参照). 実線はいずれもここで求めた理論式による.

端で圧力差 ΔP をつくって流体を流すのであるが、パイプの長さを L とすると (L は a に比べて充分大きく端の影響はないとする), $\Delta P = L dP/dz$ であるから, 単位時間あたり J (kg/s) だけの流体を流すのに使われる仕事は $-(J/\rho) \cdot L dP/dz$ である. (6.22) を使うと

$$-\frac{J}{\rho} L \frac{dP}{dz} = \frac{\pi a^4}{8\rho\nu} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 L$$

これはちょうど上の結果とつじつまが合っている.

図 6-8 はパイプの壁にはたらく単位面積あたりの力 $f \equiv -(dP/dz)(a/2)$ と平均の流速 $V = J/\rho\pi a^2$ との関係をいろいろな半径のパイプ中の水, 空気, 油の流れで測定した結果で, (6.22) を書き直した式 $f/\rho V^2 = 8\nu/aV$ と, V があまり大きくないときにはよく一致している. V が大きくなったときの変化については 6-9 節でふれることにする.

$$f = \frac{8\nu}{aV} \rho V^2 = 8\eta V \frac{1}{a}$$

$$= 8\eta \frac{J}{\rho\pi a^2} \frac{1}{a}$$

問 題

1. 本節(i)項の a) の場合について, (6.14) 式で表わされるエネルギーの収支を示せ.
2. 長さ 1 m, 半径 1 mm の円形のパイプで 2 つの水槽を結んだ. 水面の差が 50 cm のときの管の中心での流速と流量を求めよ.



6-4 球のまわりのおそい流れとストークス抵抗

粘性の大きな油のような流体のなかの球の運動を考えてみよう. 粘性が大きいため球の速度が小さくても大きな力で引っ張らなければならない. 球の速度が小さければまわりの流体の速度も小さいから, 流体の要素の運動を考えると慣性力は無視できて, 流体を動かそうとする力すなわち圧力と粘性力との釣り合いで運動が定められる. たとえば滑車にひもで吊り下げられた錘が落下するとき, 滑車に摩擦があると, 運動方程式は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \lambda \frac{dz}{dt}$$

となる. ここで右辺第 2 項の摩擦力は速度に比例するとした. もし λ が大きけ

れば錘はすぐ摩擦力と重力の釣り合いだけできまる一定速度 $dz/dt = -mg/\lambda$ で運動するようになる.

流れの速度が小さいとナビエ-ストークス方程式で $\mathbf{v}$ について 2 次の慣性項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ は無視できる. さらに定常流を問題にするときには $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ である. この場合には上に述べたようにナビエ-ストークス方程式 (6.9) は流体要素にはたらく圧力と粘性力と外力の釣り合いの式となる (これからは外力 = 0 とする):

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (6.23)$$

流体は縮まないとしているから, 速度場は

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (6.24)$$

を満足しなければならない. したがって (6.23, 24) が $\mathbf{v}$ と P を定める方程式となる. 慣性力を無視する近似はストークス近似とよばれる.

ここで速度 $\mathbf{v}$ の一様流のなかに球が静止しているとき, そのまわりにできる流れをストークス近似で求めよう. 完全流体の場合の同じ問題は 4-3 節で扱った. 完全流体の場合の境界条件は球の表面で速度 $\mathbf{v}$ の法線成分が 0 であればよ

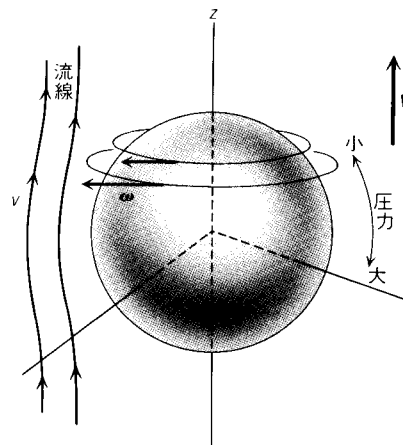


図 6-9 一様流のなかに静止している球のまわりの流れ.

かったが、こんどは(6.12)によって $\mathbf{v}=0$ でなければならない。原点を球の中心にえらび $\mathbf{V}$ の方向を z 軸にとろう(図6-9)。

一般に(6.23)の両辺の発散をとると、(6.24)のために

$$\nabla^2 P = 0 \quad (6.25)$$

でなければならない。すなわち連続の方程式に従う流れをつくり出す圧力場はラプラス方程式の解でなければならない。球から充分離れたところでは圧力は一定になるはずであるから、 r とともに大きくなる解は許されない。4-2節でみたようにラプラス方程式をみたし、 $r \rightarrow \infty$ で一定になる解は

$$P(\mathbf{r}) = P_0 + \frac{c}{r} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots$$

(4.14, 17)である。第2項があると、半径方向の圧力勾配によって、半径方向の流れが生じることになるから $c=0$ でなければならない。そこで圧力場として

$$P(\mathbf{r}) = P_0 + a\rho\nu \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (6.26)$$

という形を仮定しよう。この圧力変化は $\cos\theta/r^2$ に比例し、図6-9に示したように粘性力に抗して流れをつくりだすために期待される形になっている。 a はあとできめる定数であり、 $\rho\nu$ を係数に含めたのは以下の式を簡単にするためである。(6.26)を(6.23)に代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla^2 v_x &= -aV \frac{3xz}{r^5} \\ \nabla^2 v_y &= -aV \frac{3yz}{r^5} \\ \nabla^2 v_z &= -aV \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

が得られる。次の問題はこの方程式をみたし、発散が0((6.24)であるような速度場を見出すことであるが、ここではいきなり答えを与えよう(問題1)：

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \left(1 - \frac{b}{3r^3} + \frac{a}{2r} \right) + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \left(\frac{a}{2r^3} + \frac{b}{r^5} \right) \quad (6.28)$$

ここで b は任意定数である。最後に速度場は球面での条件、すなわち球の半径を r_0 としたとき、 $|\mathbf{r}|=r_0$ とおくと $\mathbf{v}=0$ でなければならない。(6.28)で $r=r_0$

としたとき、 $\mathbf{r}$ の方向は任意であるから、 $\mathbf{v}=0$ となるためには第1項と第2項がそれぞれ0でなければならない。これから定数は $a=-3r_0/2$ 、 $b=3r_0^3/4$ ときまり、求める速度場は

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \left(1 - \frac{3r_0}{4r} - \frac{r_0^3}{4r^3} \right) - \frac{3}{4} \frac{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \quad (6.29)$$

となる。

完全流体のときの速度場(4.24)と比べると、 $1/r$ に比例する項があるのが大きな違いであり、球があることの影響が遠くまで及んでいる。渦度は図6-9に示したように球のまわりをとりかこむ(問題2)。圧力は(6.26)で $a=-3r_0/2$ とおけばよい。球の表面にはたらく圧力の合力は、圧力がつねに面に垂直にはたらくことを考えに入れると、球面上の面積分

$$\mathbf{F}_p = \int_{|\mathbf{r}|=r_0} dS \frac{\mathbf{r}}{r} \left(P_0 - \frac{3}{2} \rho\nu r_0 V \frac{z}{r^3} \right) \quad (6.30)$$

で与えられる。(6.30)で0でないのは z 成分、つまり $\mathbf{V}$ の方向の成分だけで、

$$\mathbf{F}_p = 2\pi\rho\nu r_0 \mathbf{V} \quad (6.31)$$

となる。

球には圧力だけでなく粘性力もはたらくことを忘れてはならない。(6.4)の F_{ik} は k 軸に垂直な単位面積にはたらく i 方向の力であることを思い出そう。球面の法線は $\mathbf{r}/r$ ($r=r_0$)であるから、球にはたらく粘性力の i 成分は

$$F_{vi} = - \int_{|\mathbf{r}|=r_0} dS \left\{ F_{ix} \frac{x}{r} + F_{iy} \frac{y}{r} + F_{iz} \frac{z}{r} \right\} \quad (6.32)$$

で与えられる。問題の性質から $\mathbf{F}_v$ もやはり z 成分しかないはずである。定義(6.4)に(6.29)を代入して計算すると(問題3)。

$$\mathbf{F}_v = 4\pi\rho\nu r_0 \mathbf{V} \quad (6.33)$$

が得られ、(6.31)とあわせて球の受ける力は

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_v = 6\pi\rho\nu r_0 \mathbf{V} \quad (6.34)$$

となる。これはストークス抵抗(Stokes' resistance)とよばれる。

静止している粘性流体中を球が速度 $\mathbf{V}$ で動いているときの速度場は、(6.29)から $\mathbf{V}$ を引けばよい。そのときの流線は図6-10のようになる。粘性のため球

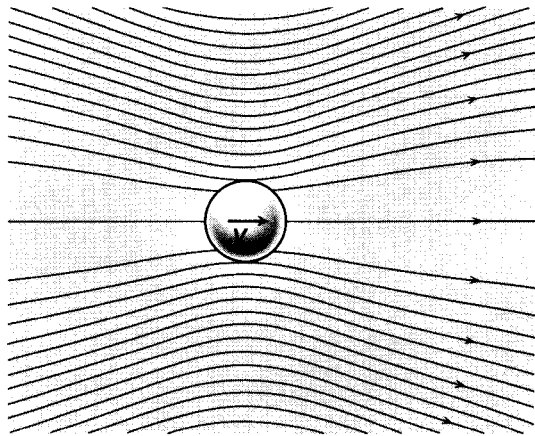


図 6-10 静止している粘性流体中を動く球のまわりの速度場の流線.

が流体を引きずるから、完全流体のときの流線図 4-5 とは著しく異なっている。

上の結果は慣性力を無視する近似で得られたものである。 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ が粘性力 $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ に比べて無視できるためには、いまの場合

$$V^2/r_0 \ll \nu V/r_0^2$$

すなわち

$$V \ll \nu/r_0 \quad (6.35)$$

でなければならない(これは 6-8 節で定義されるレイノルズ数が 1 より小さいという条件である)。20°C の水の場合 $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ であるから、半径 $r_0 = 1 \text{ mm}$ の球であれば

$$V \ll 1.0 \text{ (mm/s)}$$

でないといまの近似は適用できない(問題 4)。6-9 節でふれるように、速度が大きくなると流れはまったく異なった様相を示すことを注意しておこう。

問 題

1. (6.29) の速度場が $\text{div } \mathbf{v} = 0$ および (6.27) をみたすことを確かめよ。

2. (6.29) から渦度 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ を求めよ。
3. (6.32) および (6.33) を求めよ。
4. ストークス抵抗の式 (6.34) を用いて、半径 0.02 mm の水滴が 20°C の空气中を落下する速度を求めよ。結果はストークス近似を使うことと矛盾しないか？

6-5 平板の振動による流れ

いままで流れが時間によらない定常流を考察してきたが、この節では時間変化のある流れのもっとも簡単な例をとり上げよう。6-3 節では板が一定速度で動く場合を議論したが、こんどは $z=0$ にある板が x 方向に振動数 ω の調和振動をしているとき、それに接している粘性流体がどんな運動をするかを調べる。簡単のため流体は $z>0$ の空間を占めている(上の板は $z=\infty$ にある)としよう(図 6-11)。板は調和振動をしているからその速度は

$$U(t) = U_0 e^{-i\omega t}$$

とする。流体は板に引きずられて運動するからその速度場は x 成分しかなく、しかも z と t だけの関数である： $\mathbf{v} = (v_x(z, t), 0, 0)$ 。境界条件は板の面 $z=0$ で

$$v_x(0, t) = U_0 e^{-i\omega t} \quad (6.36)$$

および $z=\infty$ で $v_x(\infty, t) = 0$ である。

外力がないとすると、ナヴィエーストークス方程式はこの場合

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (6.37)$$

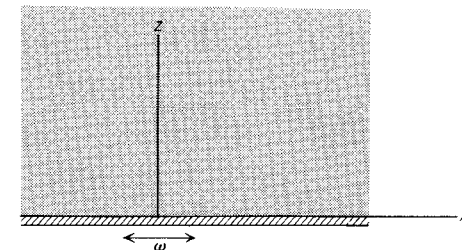


図 6-11 振動数 ω で調和振動している板の上に粘性流体が接している。

非圧縮性流体の数値計算：定式化

実用上の問題では、流体を非圧縮性 とみなしてよい
場合がある。 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \nabla \rho = 0$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0} \quad \text{--- (†)}$$

未知数 $\mathbf{u}$ (3成分), P 計 4 つ
非圧縮性流体] に対する Navier-Stokes 方程式は,
Newton 流体]

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{非線形項}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}} \quad \text{--- (††)}$$

上式をベクトル $\mathbf{u}$ の各成分で記述すると 3成分 1 行。
従って、4つの未知数は、(†) と (††) とを解けばよい。

(††) は $\mathbf{u}$ に関して時間発展の式であるが、 P に関しては
時間発展の形 1 行 1 列 1 行。

(††) の発散 (div) をとる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 P + \frac{\eta}{\rho} \operatorname{div}(\nabla^2 \mathbf{u}) + \operatorname{div} \mathbf{f}$$

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{u} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \right) + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \cdot \mathbf{u} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z \partial y^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)$$

$$= \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{u}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \nabla^2 P = -\operatorname{div}[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] - \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{f}} \quad \text{--- (†††)}$$

非圧縮性流体の場合 $\text{div} \mathbf{u} = 0$ なので、右辺第2項, 第3項
 はゼロになるが“(数値計算)”上 ここで残しておく
 (***)

時間を離散化し, $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$
 とし, $t_n = t_0 + n \Delta t$

時刻 t_n で $\mathbf{u}$ を $\mathbf{u}^n$ と書く

(***) は,
$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p^n = -\text{div}[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n] - \underbrace{\frac{\text{div} \mathbf{u}^{n+1} - \text{div} \mathbf{u}^n}{\Delta t}}_{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}}{\partial t}} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \text{div} \mathbf{u}^n + \text{div} \mathbf{f}^n$$

となる。

(おてこの時間で $\text{div} \mathbf{u} = 0$ で近似)

今 $\text{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0$ としよう。

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p^n = -\text{div}[(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n] + \frac{\text{div} \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \text{div} \mathbf{u}^n + \text{div} \mathbf{f}^n$$

— (#)

→ 例えばSOR法

お時間 t_n で, 今考えている空間での $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ が与えられたら

式 (#) より (例えば反復法を用いて) 各空間の点での $p(\mathbf{r})$ を
 求めることができる。(圧力の境界条件が必要)

(**) を 離散化すると,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \left[-(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{\rho} \nabla p^n + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^n \right]$$

— (##)

となる。この方法は MAC (marker and cell) 法と呼ばれる。